

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

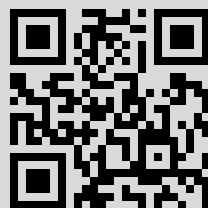
Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Квантование групп Ли и алгебр Ли, *Алгебра и анализ*, 1989, том 1, выпуск 1, 178–206

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 195.218.150.2

6 июля 2017 г., 15:19:09



Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев

КВАНТОВАНИЕ ГРУПП ЛИ И АЛГЕБР ЛИ

Даны систематическое определение и описание основных свойств квантовых простых групп Ли, квантовых векторных пространств и квантовых простых алгебр Ли. Установлена их связь с конструкциями квантовых деформаций универсальных обертывающих алгебр простых алгебр Ли и квантового дубля алгебр Хопфа.

Термин «квантовая группа» и связанные с ним алгебраические конструкции в настоящее время получают все большую популярность. Здесь мы дадим систематическое изложение оснований соответствующей теории.

Основным источником этого сюжета является квантовый метод обратной задачи, возникший в процессе естественного развития теории солитонов [1—3] (см. также обзоры [4—6]). Также следует упомянуть серию работ [7, 8], имеющих иную мотивировку.

Квантовые группы Ли и алгебры Ли появились как абстракции конкретных алгебраических конструкций, возникших в недрах квантового метода обратной задачи. Приведем два иллюстративных примера.

В работе двух авторов [9], посвященной квантовой модели Лиувилля на решетке, появилась $\mathbb{C}$ -алгебра A_q , порожденная элементами a, b, c, d с соотношениями

$$ab = qba, ac = qca, bc = cb, bd = qdb, cd = qdc, ad - da = (q - q^{-1})bc, \quad (0.1)$$

где $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Замечательным свойством этих соотношений является следующее утверждение: рассмотрим матрицы

$$T' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \quad T'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix},$$

где $(a', b', c', d'), (a'', b'', c'', d'')$ — два взаимно коммутирующих набора элементов, удовлетворяющих (0.1). Тогда набор (a, b, c, d) , где

$$T = T' T'' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

также удовлетворяет этим соотношениям. Другими словами, основные соотношения (0.1) сохраняются при умножении матриц.

В работе П. П. Кулиша и первого автора [10], посвященной построению интегрируемой модели типа XXZ со старшим спином, а также в работе Е. К. Склянина [11] была введена $\mathbb{C}$ -алгебра U_h с образующими $H, X^{\pm}$ и соотношениями

$$[H, X^{\pm}] = \pm 2X^{\pm}, \quad [X^+, X^-] = \frac{\operatorname{sh}(hH)}{\operatorname{sh}(h)}, \quad (0.2)$$

Ключевые слова: алгебра Хопфа, квантовая матричная алгебра, квантовая простая группа Ли, квантовая простая алгебра Ли, квантовое векторное пространство.

где $\hbar \in \mathbb{C}$ и играет роль постоянной Планка. При $\hbar \rightarrow 0$ эти соотношения переходят в коммутационные соотношения для генераторов алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, так что алгебру $U_{\hbar}$ можно рассматривать как деформацию — квантование — универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{sl}(2)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Как показал В. Г. Дринфельд [12, 13], последний пример и его естественное обобщение наиболее адекватно описываются на языке алгебр Хопфа.

Напомним (см., например, [14]), что $\mathbb{C}$ -алгебра A называется алгеброй Хопфа, если

1) существует гомоморфизм алгебр $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ — коумножение, — удовлетворяющий условию коассоциативности — условию коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & A \otimes A & \xrightarrow{id \otimes \Delta} & A \otimes A \otimes A \\ & \Delta \nearrow & & \nwarrow \Delta \otimes id & \\ A & & A \otimes A & & \end{array}$$

2) существуют гомоморфизм $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{C}$ — коединица — и антигомоморфизм $S : A \rightarrow A$ — антипод — такие, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id} & A \\ \Delta \downarrow & & \parallel \\ A \otimes A & \xrightarrow{id \otimes \varepsilon} & A \otimes \mathbb{C} \\ & \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} & \mathbb{C} \otimes A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A & \xrightleftharpoons[id \otimes S]{S \otimes id} & A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ & \searrow \varepsilon & & & \nearrow \varepsilon & & \\ & & \mathbb{C} & & & & \end{array}$$

коммутативны. Здесь m — отображение умножения: $m(a \otimes b) = ab$, $a, b \in A$, а $i(c) = c \cdot 1$ — вложение $\mathbb{C}$ в A , где 1 — единица в A .

Примером алгебры Хопфа является коммутативная алгебра $\text{Fun}(G)$ гладких (непрерывных) функций на группе Ли (топологической группе) G . Коумножение Δ индуцируется групповым умножением и имеет вид

$$\Delta f(g_1 g_2) = f(g_1) g_2, \quad g_1, g_2 \in G,$$

а коединица ε и антипод S задаются формулами

$$\varepsilon(f) = f(e), \quad S f(g) = f(g^{-1}),$$

где $e \in G$ — групповая единица.

Алгебру A , удовлетворяющую только условию 1) и обладающую коединицей, называют биалгеброй. Примером биалгебры является алгебра $\mathbb{C}[t_{ij}]$ многочленов от n^2 переменных t_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, с коумножением Δ

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^n t_{ik} \otimes t_{kj} \quad (0.3)$$

и коединицей ε

$$\varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Формулу (0.3) можно переписать в терминах матрицы $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$

$$\Delta(T) = T \otimes T,$$

где символ $\otimes$ подразумевает тензорное произведение алгебр и обычное умножение матриц. При этом $\varepsilon(T) = I$, где I — единичная матрица. Введенная алгебра представляет собой алгебру, порожденную координатными функциями на матричной алгебре $M_n(\mathbb{C})$, так что коумножение (0.3) индуцируется матричным умножением.

В первом примере мы имеем дело с некоммутативной деформацией этой алгебры при $n=2$. Основное наблюдение показывает, что A_q является биалгеброй с тем же коумножением (0.3).

Второй пример алгебры U_h также является биалгеброй. Как заметил Е. К. Склянин [15], в U_h можно ввести коумножение

$$\begin{aligned} \Delta(1) &= 1 \otimes 1, \Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \\ \Delta(X^\pm) &= X^\pm \otimes e^{-\frac{hH}{2}} + e^{\frac{hH}{2}} \otimes X^\pm, \end{aligned} \quad (0.4)$$

которое вместе с заданием антипода S

$$S(H) = -H, S(X^\pm) = -e^{-\frac{hH}{2}} X^\pm e^{\frac{hH}{2}} \quad (0.5)$$

и очевидной коединицы ε

$$\varepsilon(1) = 1, \varepsilon(H) = \varepsilon(X^\pm) = 0$$

превращают U_h в некоммутативную и некокоммутиативную алгебру Хопфа.

Именно этот пример послужил исходным пунктом для работ В. Г. Дринфельда [12, 13] и М. Джимбо [16, 17], где было получено его обобщение на случай простых алгебр Ли.

Основные алгебраические формулы квантового метода обратной задачи, приводящие, в частности, к указанным выше примерам, имеют вид

$$RT_1T_2 = T_2T_1R, \quad (0.6)$$

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (0.7)$$

Здесь $R \in M_n(\mathbb{C})$, а $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes T$, где T — матрица $n \times n$ с матричными элементами из некоторой алгебры A . Нижние индексы 12, 13 и 23 в формуле (0.7) указывают на способ вложения $M_n(\mathbb{C})$ в $M_n(\mathbb{C})$, согласно выделению пары сомножителей в тензорном произведении $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Так, например, $R_{12} \in M_n(\mathbb{C})$ действует как матрица R в тензорном произведении первых двух сомножителей и как I — в последнем сомножителе.

Однако в работах [12, 13] и [16, 17] эти соотношения не были использованы в полной мере. В настоящей работе мы положили их в основу систематического определения квантовых групп Ли и алгебр Ли.

Термин «квантовый», который может показаться посторонним в чисто математическом тексте, имеет двойное назначение — он напоминает о происхождении рассматриваемых объектов и, главное, является синонимом термина «деформация» в применении к алгебраическим структурам. В этом смысле теория квантовых групп является содержательным примером общей программы некоммутативной геометрии А. Конна [18]. Квантовая группа G_q должна бы выступать как спектр некоммутативной деформации $\text{Fun}(G_q)$ алгебры $\text{Fun}(G)$ функций на группе G (если бы он существовал). Поэтому словосочетание « $\text{Fun}(G_q)$ — алгебра функций на квантовой группе G_q » следует понимать как

единое целое. Это относится и к другим примерам некоммутативных алгебр, возникающим в основном тексте. Мы считаем такую терминологию допустимой.

С нашей точки зрения, понятие квантовой (простой) группы Ли G_q является первичным по сравнению с квантовой алгеброй Ли — «спектром» деформации универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{G}$ (простой) алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Мы введем его, обобщая первый пример. Квантование алгебры $U\mathfrak{G}$ будет осуществлено при помощи обобщения соотношения Л. Шварца

$$U\mathfrak{G} \cong C_e^{-\infty}(G), \quad (0.8)$$

где $C_e^{-\infty}(G)$ — алгебра обобщенных функций на G с носителем в единичном элементе $e \in G$. На этом пути получим обобщение второго примера.

Остановимся теперь на содержании работы, представляющей собой расширенный и переработанный вариант нашего препринта [19]. В п. 1.1 § 1, отправляясь от произвольной невырожденной матрицы $R \in M_n(\mathbb{C})$ и многочлена $f(t) \in \mathbb{C}[t]$, определяем алгебры A_R и $\mathbb{C}_{f,R}^n$, которые называем соответственно алгебрами функций на квантовой матричной алгебре ранга n , ассоциированной с матрицей R , и квантовом n -мерном векторном пространстве, ассоциированном с многочленом $f(t)$ и матрицей R . При этом алгебра $\mathbb{C}_{f,R}^n$ как векторное пространство снабжается естественной структурой левого A_R -комодуля.

В п. 1.2 § 1 кратко обсуждаем роль уравнения (0.7), а в п. 1.3, 1.4 рассматриваем алгебры A_q , отвечающие его однопараметрическим решениям $R=R_q$, ассоциированным с простыми алгебрами Ли классического типа. Так, в п. 1.3 рассмотрен случай серии A_{n-1} и введены алгебры Хопфа, соответствующие квантовым группам $GL_q(n)$, $SL_q(n)$, и квантовое n -мерное векторное пространство $\mathbb{C}_q^n$. Описаны вещественные формы $SL_q(n, \mathbb{R})$ и $SU_q(n)$ квантовой группы $SL_q(n)$ и определены соответствующие им квантовые вещественные и эрмитовы векторные пространства, а также приведены другие примеры левых комодулей. В п. 1.4 по такой же схеме вводятся квантовые группы $SO_q(N)$ и $Sp_q(n)$ (серии B_n , D_n и C_n), их вещественные формы и соответствующие квантовые евклидовы и симплектические пространства и приводятся их основные свойства.

В п. 1.5 объяснено, что следует понимать под теорией представлений квантовых групп, а в п. 1.6 приведена достаточно общая процедура, превращающая алгебру A_R — основной объект наших построений — в алгебру Хопфа.

В § 2 изучаем алгебру, двойственную к алгебре функций на квантовой простой группе Ли. В п. 2.1 рассматриваем общий случай и выделяем в биалгебре A_R^* алгебру Хопфа. В п. 2.2 общие построения предыдущего пункта детализируются для случая $R=R_q$. Мы устанавливаем изоморфизм введенных нами объектов с квантовыми универсальными обертывающими алгебрами простых алгебр Ли из [12, 13] и [16, 17] и показываем, что в отличие от работ [12, 13] и [16, 17], использующих квантовый аналог базиса Шевалле, наше задание основано на квантовом аналоге базиса Картана—Вейля. В частности, это оказывается полезным для явного описания центра квантовой универсальной обертывающей алгебры — квантовых элементов Казимира. В п. 2.3 вкратце излагаем известные результаты из теории представлений этих алгебр.

В § 3 показываем, как введенные в § 1, 2 объекты могут быть получены из общей конструкции квантового дубля, определенного В. Г. Дринфельдом [13].

В Заключение кратко останавливаемся на вопросах, не затронутых в основном тексте.

Статья написана на формальном алгебраическом языке и по большей части состоит из определений и мотивировок. Многочисленные теоремы (их всего 18)

выделены в значительной степени для логических остановок; опущенные детали доказательств оставлены читателю для поучительных упражнений.

Нам приятно поблагодарить А. Н. Кириллова за многочисленные и полезные обсуждения.

§ 1. Квантование простых групп Ли

1.1. Обозначим через $\mathbb{C}\langle t_{ij} \rangle = \mathbb{C}\langle t_{11}, \dots, t_{nn} \rangle$ алгебру некоммутативных многочленов от n^2 переменных — свободную ассоциативную $\mathbb{C}$ -алгебру с единицей 1, порожденную элементами t_{ij} , $i, j=1, \dots, n$. Пусть $R \in M_n(\mathbb{C})$ — произвольная невырожденная матрица порядка $n^2 \times n^2$. Рассмотрим двусторонний идеал $\mathbb{I}_R$ в $\mathbb{C}\langle t_{ij} \rangle$, порожденный соотношениями

$$RT_1T_2 = T_2T_1R, \quad (1.1)$$

где $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes T \in M_{n^2}(\mathbb{C}\langle t_{ij} \rangle)$, $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C}\langle t_{ij} \rangle)$ — матрица порядка $n \times n$ с матричными элементами из алгебры $\mathbb{C}\langle t_{ij} \rangle$, а I — единица в $M_n(\mathbb{C})$. В терминах образующих t_{ij} соотношения (1.1) принимают вид

$$\sum_{m,p=1}^n R_{ij,mp} t_{mk} t_{pl} = \sum_{m,p=1}^n t_{jp} t_{im} R_{mp,kl},$$

$i, j, k, l=1, \dots, n$. Здесь $R_{ij,kl}$ — матричные элементы матрицы R , причем индексы ik и jl относятся соответственно к первому и второму сомножителям тензорного произведения $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$.

Определение 1. Факторалгебра

$$A_R = \mathbb{C}\langle t_{ij} \rangle / \mathbb{I}_R$$

называется алгеброй функций на квантовой матричной алгебре ранга n , ассоциированной с матрицей R .

Алгебра A_R естественно наследует структуру градуированной алгебры из $\mathbb{C}\langle t_{ij} \rangle$, при которой образующие t_{ij} , $i, j=1, \dots, n$, имеют степень 1.]

При $R=I$ (здесь и далее мы, не опасаясь недоразумений, обозначаем через I единицу как в $M_n(\mathbb{C})$, так и в $M_{n^2}(\mathbb{C})$) алгебра A_R совпадает с приведенной во Введении коммутативной алгеброй координатных функций на матричной алгебре $M_n(\mathbb{C})$.

Теорема 1. Алгебра A_R является биалгеброй с коумножением Δ

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^n t_{ik} \otimes t_{kj}, \quad i, j=1, \dots, n,$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1,$$

т. е. $\Delta(T) = T \hat{\otimes} T$, и коединицей ε

$$\varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}, \quad i, j=1, \dots, n,$$

т. е. $\varepsilon(T) = I$.

Доказательство очевидно.

Эта теорема «оправдывает» определение 1 и показывает, что A_R является некоммутативной деформацией биалгебры, порожденной координатными функциями на $M_n(\mathbb{C})$ с независимым от R коумножением (0.3).

Пусть $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ — алгебра некоммутативных многочленов от n переменных $x_1, \dots, x_n$, а $P \in M_{n^2}(\mathbb{C})$ — матрица перестановки в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Она имеет матричные элементы $P_{ij,kl} = \delta_{il} \delta_{jk}$, $i, j, k, l=1, \dots, n$, и для любых $u, v \in \mathbb{C}^n$ $Pu \otimes v = v \otimes u$. Положим $\hat{R} = PR$ и для каждого многочлена $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ обозна-

чим через $\mathbb{I}_{f,R}$ двусторонний идеал в $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, порожденный соотношениями

$$f(\hat{R})(x \otimes x) = 0, \quad (1.2)$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ — вектор-столбец с элементами из алгебры $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$. В терминах образующих x_i соотношения (1.2) принимают вид

$$\sum_{k,l=1}^n f(\hat{R})_{ij,kl} x_k x_l = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Определение 2. Факторалгебра

$$\mathbb{C}_{f,R}^n = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle / \mathbb{I}_{f,R}$$

называется алгеброй функций на квантовом n -мерном векторном пространстве, ассоциированным с многочленом $f(t)$ и матрицей R .

Отображение $\delta: \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle t_{ij} \rangle \otimes \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, задаваемое формулой $\delta(x) = T \otimes x$, т. е.

$$\delta(x_i) = \sum_{k=1}^n t_{ik} \otimes x_k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

очевидно, является гомоморфизмом алгебр и наделяет $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ структурой левого $\mathbb{C}\langle t_{ij} \rangle$ -комодуля. Последнее означает, что следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes V & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id} \otimes \delta} \\ \searrow \Delta \otimes \text{id} \end{array} & A \otimes A \otimes V \\ & \parallel & \\ & & A \otimes A \otimes V \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & A \otimes V & \\ \delta \nearrow & & \searrow \varepsilon \otimes \text{id} \\ V & \xlongequal{\quad} & \mathbb{C} \otimes V \end{array},$$

где $A = \mathbb{C}\langle t_{ij} \rangle$, $V = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, коммутативны.

Аналогичное утверждение справедливо и для алгебр A_R и $\mathbb{C}_{f,R}^n$.

Теорема 2. Отображение $\delta: \mathbb{C}_{f,R}^n \rightarrow A_R \otimes \mathbb{C}_{f,R}^n$, задаваемое формулой (1.3), корректно определено, является гомоморфизмом алгебр и наделяет $\mathbb{C}_{f,R}^n$ структурой левого A_R -комодуля.

Доказательство. Мы должны показать, что $f(\hat{R})(\delta(x) \otimes \delta(x)) = 0$. В силу формулы (1.1) имеем

$$\hat{R}(T \otimes T) = (T \otimes T) \hat{R},$$

где $T \otimes T = T_1 T_2$, так что

$$\begin{aligned} f(\hat{R})(\delta(x) \otimes \delta(x)) &= f(\hat{R})((T \otimes x) \otimes (T \otimes x)) = \\ &= f(\hat{R})((T \otimes T) \otimes (x \otimes x)) = (T \otimes T) \otimes f(\hat{R})(x \otimes x) = 0. \end{aligned}$$

При $\hat{R} = P$ и $f(1) = 0$ алгебра $\mathbb{C}_{f,R}^n$ превращается в коммутативную алгебру $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ и действие δ индуцируется обычным действием матричной алгебры $M_n(\mathbb{C})$ на $\mathbb{C}^n$. Поэтому формулу (1.3) можно интерпретировать как не зависящее от R «действие квантовой матричной алгебры на квантовом векторном пространстве».

Замечание 1. Градуированные алгебры A_R и $\mathbb{C}_{f,R}^n$ являются конечно-порожденными квадратичными алгебрами специального вида. С functorиальной точки зрения категория квадратичных алгебр изучалась в работах [20, 21]; при этом в качестве алгебры функций на квантовом векторном простран-

стве может выступать произвольная конечнопорожденная квадратичная алгебра A . Как показано в [21], существует каноническая конструкция, сопоставляющая алгебре A бигалгебру $\text{End}(A)$ с кодействием (1.3). Однако, как отмечалось в [21], в коммутативном случае $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ каноническая алгебра $\text{End}(A)$ не совпадает с $M_n(\mathbb{C})$.

З а м е ч а н и е 2. Для матрицы R общего вида алгебры A_R и $C_{f,R}^n$ по своим свойствам могут весьма отличаться от классических ($R=I$) алгебр $\mathbb{C}[t_{i,j}]$ и $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. В частности, эти алгебры могут иметь различные ряды Пуанкаре — производящие функции для размерностей однородных компонент степени $n=0, 1, \dots$. Другими словами, они могут иметь разный «запас элементов». В связи с этим представляет интерес задача о нахождении условий на матрицу R и многочлен $f(t)$, гарантирующих совпадение рядов Пуанкаре классических и квантовых алгебр.

1.2. Начиная с этого места, мы будем предполагать, что матрица R удовлетворяет упоминавшемуся во введении уравнению (0.7), т. е.

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (1.4)$$

Оно по крайней мере гарантирует, что дополнительные соотношения на однородные элементы третьей степени алгебры A_R , непосредственно вытекающие из (1.1), выполняются тождественно. (Однако, как показано в [22], одного условия (1.4) недостаточно для решения задачи из предыдущего замечания).

З а м е ч а н и е 3. В терминах матрицы $\hat{R}$ уравнение (1.4) принимает вид

$$(\hat{R} \otimes I)(I \otimes \hat{R})(\hat{R} \otimes I) = (I \otimes \hat{R})(\hat{R} \otimes I)(I \otimes \hat{R}).$$

В такой форме его решениям отвечают представления $\rho: B_3 \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ группы кос B_3 с образующими s_1, s_2 и соотношением $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$, удовлетворяющие «условию локальности»:

$$\rho(s_1) = \hat{R} \otimes I, \quad \rho(s_2) = I \otimes \hat{R}.$$

Таким образом, приходим к задаче описания всех локальных представлений группы кос B_3 . Удивительно, что эта задача не имеет окончательного решения даже в случае симметрической группы $\text{Symm}(3) = B_3 / \{s_1^2 = s_2^2 = 1\}$. Матрица $\hat{R} = P$ доставляет простейший пример локального представления группы $\text{Symm}(3)$. Отметим, что условие локальности позволяет очевидным образом продолжить представление ρ до представления группы кос B_n при произвольном n .

В работах [16, 17, 23], мотивированных квантовым методом обратной задачи, были построены решения уравнения (1.4), связанные с простыми алгебрами Ли классического типа. Соответствующие матрицы R действуют в тензорном квадрате фундаментального представления, зависят от комплексного параметра $q \neq 0$ — параметра деформации — и при $q=1$ превращаются в единичную матрицу I . Отвечающие им бигалгебры A_R мы и будем использовать в качестве основы для построения квантовых простых групп Ли, переходя от A_R к их естественным факторалгебрам, уже допускающим структуру алгебры Хопфа. Эта процедура параллельна заданию классических групп Ли как алгебраических групп — алгебраических подмногообразий в $M_n(\mathbb{C})$. При этом в отличие от случая $q=1$, когда все простые группы Ли вложены в «Ее Всеобъемлющее Величество» [24] $M_n(\mathbb{C})$, в случае $q \neq 1$ алгебры A_R , отвечающие различным сериям простых алгебр Ли, неизоморфны. Это лишний раз иллюстрирует общий принцип: «квантование снимает вырождение», поэтому случай $q \neq 1$ является, в известном смысле, более фундаментальным.

1.3. Серия A_{n-1} .

Соответствующая матрица $R=R_q$ имеет вид [16]

$$R_q = q \sum_{i=1}^n e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n e_{ii} \otimes e_{jj} + \\ + (q - q^{-1}) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^n e_{ij} \otimes e_{ji}, \quad q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (1.5)$$

где $e_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$, $i, j = 1, \dots, n$, — матричные единицы. Матрица $\hat{R}_q = PR_q$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{R}_q^2 = (q - q^{-1}) \hat{R}_q + I \quad (1.6)$$

— условию Гекке. При $q^2 \neq -1$ матрица $\hat{R}_q$ полупроста и имеет спектральное разложение

$$\hat{R}_q = qP_q^{(+)} - q^{-1}P_q^{(-)}, \quad (1.7)$$

где

$$P_q^{(+)} = \frac{\hat{R}_q + q^{-1}I}{q + q^{-1}}, \quad P_q^{(-)} = \frac{-\hat{R}_q + qI}{q + q^{-1}} \quad (1.8)$$

— проекторы рангов $\frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{n(n-1)}{2}$ — квантовые аналоги симметризатора и антисимметризатора в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ соответственно. Кроме того, матрица $\hat{R}_q$ участвует в построении локальных представлений алгебры Гекке (см. [16]).

Теорема 3. Ряд Пуанкаре алгебры $A_q = A_{n,q}$ совпадает с рядом Пуанкаре коммутативной алгебры $\mathbb{C}[t_{ij}]$. В ситуации общего положения, когда $q^l \neq 1$ для любого натурального l , центр алгебры A_q порождается двумя образующими: единицей и квантовым детерминантом — элементом

$$\det_q T = \sum_{\sigma \in \text{Sym}(n)} (-q)^{l(\sigma)} t_{1\sigma_1} \dots t_{n\sigma_n},$$

где $l(\sigma)$ — длина (число инверсий) подстановки σ . Кроме того,

$$\Delta(\det_q T) = \det_q T \otimes \det_q T.$$

Определение 3. Факторалгебра алгебры A_q по соотношению $\det_q T = 1$ называется алгеброй функций на квантовой группе $\text{SL}_q(n)$ и обозначается через $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$.

При $q=1$ алгебра $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$ совпадает с коммутативной алгеброй, порожденной координатными функциями на группе Ли $\text{SL}(n)$.

Теорема 4. Биалгебра $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$ является алгеброй Хопфа с антиподом S

$$S(t_{ij}) = (-q)^{i-j} \tilde{t}_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где $\tilde{t}_{ij}$ — квантовые миноры

$$\tilde{t}_{ij} = \sum_{\sigma \in \text{Sym}(n-1)} (-q)^{l(\sigma)} t_{1\sigma_1} \dots t_{i-1\sigma_{i-1}} t_{i+1\sigma_{i+1}} \dots t_{n\sigma_n}$$

и $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) = \sigma(1, \dots, j-1, j+1, \dots, n)$. При этом $TS(T) = S(T)T = I$ и $S^2(T) = DTD^{-1}$, где $D = \text{diag}(1, q^2, \dots, q^{2(n-1)}) \in M_n(\mathbb{C})$.

Доказательство этих теорем (первое утверждение теоремы 3 содержится в [22, 25]) использует формулы (1.6)–(1.8) и вытекающие из них

выражения для квантовых аналогов симметризатора и антисимметризатора в $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$, приведенные в [16].

Замечание 4. Алгебра $\text{Fun}(\text{GL}_q(n))$ определяется как факторалгебра алгебры $A_q\langle t \rangle$ по соотношениям $tt_{ij} = t_{ij}t$, $t \det_q T = \det_q T$ $t = 1$, $i, j = 1, \dots, n$. При этом

$$S(t) = \det_q T, \quad S(t_{ij}) = t(-q)^{i-j} \tilde{t}_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Замечание 5. В простейшем случае $n=2$ матрица R_q принимает вид

$$R_q = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

и использовалась в сочетании с соотношениями (1.1) в работе [9]. В традиционных обозначениях

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

эти соотношения совпадают с соотношениями (0.1) из Введения. При этом $\det_q T = ad - qbc$, и при условии $\det_q T = 1$

$$S(T) = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом примере центральность элемента $\det_q T$ непосредственно следует из соотношений (0.1). Можно привести и более содержательное доказательство, которое обобщается на общий случай произвольного n . Для этого заметим, что $\det_q T = \text{tr } P_q^{(-)} T \otimes T$, где tr означает матричный след, и рассмотрим выражение $T_1 (P_q^{(-)})_{23} T_2 T_3$, где $T_1 = T \otimes I \otimes I$, $T_2 = I \otimes T \otimes I$, $T_3 = I \otimes I \otimes T$; мы придерживаемся обозначений из п. 1.2. Используя уравнение (1.1), вытекающее из него равенство

$$P_q^{(-)} T \otimes T = T \otimes T P_q^{(-)} = P_q^{(-)} T \otimes T P_q^{(-)}$$

и легко проверяемое соотношение

$$(P_q^{(-)})_{23} R_{13} R_{12} = q (P_q^{(-)})_{23},$$

имеем

$$\begin{aligned} T_1 (P_q^{(-)})_{23} T_2 T_3 &= (P_q^{(-)})_{23} R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} T_2 T_3 T_1 R_{13} R_{12} = \\ &= q^{-1} (P_q^{(-)})_{23} T_2 T_3 T_1 (P_q^{(-)})_{23} R_{13} R_{12} = (P_q^{(-)})_{23} T_2 T_3 T_1. \end{aligned}$$

Применяя к этому равенству матричный след по произведению второго и третьего сомножителей в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, окончательно получаем, что $T \cdot \det_q T = \det_q T \cdot T$.

Положим теперь в определении 2 $R = R_q$ и $f(t) = t - q$, так что $f(\hat{R}) = -(q + q^{-1}) P_q^{(-)}$.

Определение 4. Алгебра $\mathbb{C}_q^n$ с образующими $x_1, \dots, x_n$ и соотношениями

$$x_i x_j = q x_j x_i, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

— «алгебра q -многочленов» — называется алгеброй функций на квантовом n -мерном векторном пространстве.

Алгебра $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$ «действует» на $\mathbb{C}_q^n$ по формулам (1.3).

Выбирая при $q^2 \neq -1$ в определении $2R = R_q$ и $f(t) = t + q^{-1}$, так что $f(\hat{R}) = (q + q^{-1})P_q^{(+)}$, мы получаем

Определение 5. Конечномерная алгебра $\wedge \mathbb{C}_q^n$, $q^2 \neq -1$, с образующими $x_1, \dots, x_n$ и соотношениями

$$x_i^2 = 0, \quad x_i x_j = -q^{-1} x_j x_i, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

называется q -внешней алгеброй квантового векторного пространства $\mathbb{C}_q^n$.

«Действие» δ алгебры A_q на $\wedge \mathbb{C}_q^n$ приводит к формуле $\delta(x_1, \dots, x_n) = \det_q T \otimes x_1 \dots x_n$, которая вместе с теоремой 2 дает непосредственное доказательство равенства $\Delta(\det_q T) = \det_q T \otimes \det_q T$.

З а м е ч а н и е 6. Приведенная интерпретация квантового детерминанта $\det_q T$ содержится и в работе [21].

В случае $|q|=1$ естественно следующее определение.

О п р е д е л е н и е 6. Алгебра $\mathbb{T}_q^n \supset \mathbb{C}_q^n$, состоящая из бесконечных формальных рядов Лорана

$$\sum_{k_1, \dots, k_n = -\infty}^{\infty} a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

по $x_1, \dots, x_n$ с быстроубывающими коэффициентами $\{a_{k_1 \dots k_n}\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, называется алгеброй функций на квантовом n -торе.

З а м е ч а н и е 7. Алгебра $\mathbb{T}_q^2$ естественно возникает при изучении слоев на торе $\mathbb{T}^2$, задаваемых уравнением Пфаффа $dy = \theta dx$ с иррациональным θ . При этом $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}$. В работе [18] она играла роль основного примера, на котором иллюстрировались конструкции некоммутативной дифференциальной геометрии; в частности, в [18] были вычислены циклические когомологии алгебры $\mathbb{T}_q^2$. Вычисление циклических когомологий алгебры $\mathbb{T}_q^n$ для произвольного n будет опубликовано в отдельной работе второго автора.

Из формулы (1.5) следует, что вектор $e \otimes e \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, где $e_i = \delta_{in}$, $i=1, \dots, n$, является собственным для матрицы $\hat{R}_q: \hat{R}_q e \otimes e = qe \otimes e$. Поэтому вложение $\mathbb{C}_q^n \hookrightarrow \text{Fun}(\text{SL}_q(n))$, задаваемое формулой $x \mapsto Te$, т. е. $x_i \mapsto t_{in}$, $i=1, \dots, n$, оказывается гомоморфизмом алгебр. Более того, из теоремы 1 следует, что $\Delta(B) \subset \text{Fun}(\text{SL}_q(n)) \otimes B$, где B — образ алгебры $\mathbb{C}_q^n$ в $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$. Таким образом, подалгебра $B \subset \text{Fun}(\text{SL}_q(n))$ является левым коидеалом.

В алгебре $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$ можно также определить и левые коидеалы $\text{Fun}(\text{SL}_q(n)/\text{SL}_q(n-k) \times \text{SL}_q(k))$, отвечающие алгебрам функций на однородных пространствах $\text{SL}(n)/\text{SL}(n-k) \times \text{SL}(k)$, $k=1, \dots, n-1$. Рассмотрим, например, случай $k=1$. Обозначим через $\mathbb{C}_{q, q^{-1}}^{2n}$ алгебру с образующими $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ и соотношениями

$$x_i x_j = q x_j x_i, \quad y_i y_j = q^{-1} y_j y_i, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad R^t P(y \otimes x) = q x \otimes y,$$

где для матриц, действующих в тензорном произведении $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ означает транспонирование по второму сомножителю. Алгебра $\mathbb{C}_{q, q^{-1}}^{2n}$ является левым $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$ -комодулем относительно «действия» $\delta(x) = T \otimes x$, $\delta(y) = S(T)^t \otimes y$. В ситуации общего положения центр алгебры $\mathbb{C}_{q, q^{-1}}^{2n}$ порождается единицей и элементом $y^t x = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n$. Вложение $x \mapsto Te$, $y \mapsto S(T)^t e$, где t означает транспонирование, показывает, что алгебра $\text{Fun}(\text{SL}_q(n)/\text{SL}_q(n-1))$ — фактор-алгебра алгебры $\mathbb{C}_{q, q^{-1}}^{2n}$ по соотношению $y^t x = 1$ — является левым коидеалом.

Обсудим теперь вещественные формы квантовой группы $\text{SL}_q(n)$. Они классифицируются сохраняющими градуировку $\ast$ -антиинволюциями алгебры Хопфа $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$. (Напомним, что $\ast$ -антиинволюцией алгебры Хопфа A

называется отображение $*$: $A \rightarrow A$, являющееся антиавтоморфизмом алгебр и автоморфизмом коалгебр и удовлетворяющее условиям инволюции $(a^*)^* = a$ и $S(S(a^*)^*) = a$ для любого $a \in A$. Здесь имеются две возможности.

I. Случай $|q|=1$.

При таких q имеем $\bar{R}_q = R_{q^{-1}} = R_q^{-1}$, где черта означает комплексное сопряжение, так что из (1.1) получаем

$$R_q T_1^* T_2^* = T_2^* T_1^* R_q,$$

где $T^* = (t_{ij}^*)_{i,j=1}^n$. Отсюда следует, что $T^* = U T U^{-1}$, где $U \in M_n(\mathbb{C})$ — диагональная матрица, удовлетворяющая условию $U \bar{U} = I$. Далее, из формул $S(T) T = TS(T) = I$ получаем, что $(T^*)^t (S(T)^*)^t = I$ и $T^t (S^{-1}(T))^t = I$. Тем самым $S(T)^* = U S^{-1}(T) U^{-1}$, и поэтому требование $S(S(T)^*) = T$ также сводится к условию $U \bar{U} = I$. При помощи автоморфизма $t_{ij} \mapsto \alpha_i \alpha_j^{-1} t_{ij}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \dots, n$, алгебры $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$ можно добиться того, чтобы $U = I$, поэтому $T^* = T$.

Определение 7. Алгеброй $\text{Fun}(\text{SL}_q(n, \mathbb{R}))$ называется алгебра $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$, снабженная $*$ -антиинволюцией $t_{ij}^* = t_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Замечание 8. Алгебра $\text{Fun}(\text{SL}_q(2, \mathbb{R}))$ (точнее, ее представление в гильбертовом пространстве состояний одномерной квантово-механической частицы) была введена в работе [9].

Определение 8. Алгебра $\mathbb{C}_q^n$, снабженная антиинволюцией $x_i^* = x_i$, $i = 1, \dots, n$, называется алгеброй функций на квантовом n -мерном вещественном векторном пространстве и обозначается через $\mathbb{R}_q^n$.

Отображение δ согласовано со введенными антиинволюциями $\delta^*(x) = \delta(x^*)$ и приводит к «действию» квантовой группы $\text{SL}_q(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}_q^n$.

В рассматриваемом случае $|q|=1$ можно определить и левые коидеалы, отвечающие симметрическим пространствам $\text{SL}(n, \mathbb{R})/\text{SO}(n)$. Они задаются

$*$ -подалгебрами в $\text{Fun}(\text{SL}_q(n, \mathbb{R}))$, порожденными элементами $\sum_{k=1}^n t_{ik} t_{jk}^*$, $i, j = 1, \dots, n$. В частности, при $n=2$ получаем квантовый аналог плоскости Лобачевского. Было бы весьма желательно определить также квантовые фуксовы группы и римановы поверхности.

II. Случай $q \in \mathbb{R}$.

При таких q имеем $\bar{R}_q = R_q$, так что из (1.1) получаем

$$R_q T_2^* T_1^* = T_1^* T_2^* R_q.$$

С другой стороны, из (1.1) и свойства $R^t = P R P$ следует, что

$$R_q (S(T)^t)_2 (S(T)^t)_1 = (S(T)^t)_1 (S(T)^t)_2 R_q,$$

так что $T^* = U S(T)^t U^{-1}$, где $U \in M_n(\mathbb{C})$ — диагональная матрица. Сравнение свойств инволюции и квадрата антипода из теоремы 4 приводит к тому, что $U \in M_n(\mathbb{R})$. И, наконец, при помощи автоморфизма $t_{ij} \rightarrow \alpha_i \alpha_j^{-1} t_{ij}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, алгебры $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$ можно добиться того, чтобы $U = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, n$.

Определение 9. Алгеброй $\text{Fun}(\text{SU}_q(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n))$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, n$, называется алгебра $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$, снабженная $*$ -антиинволюцией $t_{ij}^* = \varepsilon_i \varepsilon_j S(t_{ji})$, $i, j = 1, \dots, n$. В частности, при $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 1$ получается алгебра $\text{Fun}(\text{SU}_q(n))$ — компактная форма алгебры $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))$, — задаваемая соотношениями $T T^* = T^* T = I$.

Замечание 9. Алгебра $\text{Fun}(\text{SU}_q(2))$ была введена в работах [7, 8] и [26].

Замечание 10. При $q \neq \pm 1$ алгебры $\text{Fun}(\text{SL}_q(2, \mathbb{R}))$ и $\text{Fun}(\text{SU}_q(1, -1))$ определены при разных областях изменения q и тем самым неизоморфны. Это еще раз показывает, что «квантование снимает вырождение».

Определение 10. Алгебра $\mathbb{C}_q^{2n, q^{-1}}$, где $q \in \mathbb{R}$, снабженная антиинволюцией $y_i^* = x_i$, $i = 1, \dots, n$, называется алгеброй функций на квантовом n -мерном эрмитовом пространстве и обозначается через U_q^n .

«Действие» δ алгебры $\text{Fun}(\text{SU}_q(n))$ на U_q^n сохраняет эрмитову квадратичную форму $x^{*t}x = x_1^*x_1 + \dots + x_n^*x_n$, т. е. $\delta(x^{*t}x) = 1 \otimes x^{*t}x$.

Тем самым факторалгебра SU_q^n алгебры U_q^n по соотношению $x^{*t}x = 1$ играет роль алгебры функций на квантовой $(2n-1)$ -мерной унитарной сфере.

1.4. Серии B_n , C_n , D_n .

Соответствующая матрица $R = R_q$ имеет порядок $N^2 \times N^2$, где $N = 2n + 1$ для серии B_n и $N = 2n$ для серий C_n и D_n , и выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} R_q = & q \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i'}}^N e_{ii} \otimes e_{ii} + e_{\frac{N+1}{2}, \frac{N+1}{2}} \otimes e_{\frac{N+1}{2}, \frac{N+1}{2}} + \\ & + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j, j'}}^N e_{ii} \otimes e_{jj} + q^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i'}}^N e_{i'i'} \otimes e_{ii} + (q - q^{-1}) \sum_{\substack{i, j=1 \\ i > j}}^N e_{ij} \otimes e_{ji} - \\ & - (q - q^{-1}) \sum_{\substack{i, j=1 \\ i > j}}^N q^{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \varepsilon_i \varepsilon_j e_{ij} \otimes e_{i'j'}, \quad q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \end{aligned} \quad (1.9)$$

второе слагаемое присутствует лишь для серии B_n . Здесь $e_{ij} \in M_N(\mathbb{C})$ — матричные единицы, $i' = N + 1 - i$, $j' = N + 1 - j$, $\varepsilon_i = 1$, $i = 1, \dots, N$, для серий B_n и D_n , $\varepsilon_i = 1$, $i = 1, \dots, \frac{N}{2}$, $\varepsilon_i = -1$, $i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N$ для серии C_n и

$$(\rho_1, \dots, \rho_N) = \begin{cases} (n - \frac{1}{2}, n - \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, -n + \frac{1}{2}) & \text{для серии } B_n, \\ (n, n - 1, \dots, 1, -1, \dots, -n) & \text{для серии } C_n, \\ (n - 1, n - 2, \dots, 1, 0, 0, -1, \dots, -n + 1) & \text{для серии } D_n. \end{cases}$$

Матрица R_q может быть извлечена из работ [17] и [23]; в виде (1.9) она была приведена в [27].

Замечание 11. В § 3 будет описана конструкция, связывающая матрицы R_q вида (1.8) — (1.9) с классическими простыми алгебрами Ли.

Матрица R_q удовлетворяет условиям

$$R_q = C_1 (R_q^{t_1})^{-1} C_1^{-1} = C_2 (R_q^{-1})^{t_2} C_2^{-1}, \quad (1.10)$$

где t_1 и t_2 для матриц в тензорном произведении $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$ означают соответственно транспонирование по первому и второму сомножителям; далее, как всегда, $C_1 = C \otimes I$, $C_2 = I \otimes C$, $C = C_0 q^\rho$, причем $\rho = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_N)$, $(C_0)_{ij} = \varepsilon_i \delta_{i'j}$, $i, j = 1, \dots, N$. Имеем $C^2 = \varepsilon I$, где $\varepsilon = 1$ для серий B_n , D_n и $\varepsilon = -1$ для серии C_n .

Матрица $\hat{R}_q = P R_q$ удовлетворяет уравнению

$$(\hat{R}_q - qI)(\hat{R}_q + q^{-1}I)(\hat{R}_q - \varepsilon q^{\varepsilon - N}I) = 0$$

и участвует в построении локальных представлений алгебры Бирман—Венцля [27]. При $N > 2$ и условии $(1 + q^2)(1 + \varepsilon q^{\varepsilon - N + 1})(1 - \varepsilon q^{\varepsilon - N - 1}) \neq 0$ матрица $\hat{R}_q$ проста и имеет спектральное разложение

$$\hat{R}_q = q P_q^{(+)} - q^{-1} P_q^{(-)} + \varepsilon q^{\varepsilon - N} P_q^{(0)},$$

где

$$P_q^{(+)} = \frac{\hat{R}_q^2 - (\varepsilon q^{\varepsilon-N} - q^{-1}) \hat{R}_q - \varepsilon q^{\varepsilon-N-1} I}{(q + q^{-1})(q - \varepsilon q^{\varepsilon-N})},$$

$$P_q^{(-)} = \frac{\hat{R}_q^2 - (q + \varepsilon q^{\varepsilon-N}) \hat{R}_q + \varepsilon q^{\varepsilon-N+1} I}{(q + q^{-1})(q^{-1} + \varepsilon q^{\varepsilon-N})},$$

$$P_q^{(0)} = \frac{\hat{R}_q^2 - (q - q^{-1}) \hat{R}_q - I}{(\varepsilon q^{\varepsilon-N} - q)(q^{-1} + \varepsilon q^{\varepsilon-N})}$$

— проекторы рангов $\frac{N(N+1)}{2} - 1$, $\frac{N(N-1)}{2}$, 1 для серий B_n и D_n , $\frac{N(N+1)}{2}$, $\frac{N(N-1)}{2} - 1$, 1 для серии C_n . При $q=1$, очевидно, $\hat{R}_q = P$, а при $N=2$ в силу изоморфизма $A_1 \approx C_1$ (т. е. $SL(2) = Sp(1)$) матрица $q^{-1} \hat{R}_q$ совпадает с матрицей $\hat{R}_{q^2}$ вида (1.8) для случая A_1 .

Кроме того, справедливы формулы

$$\hat{R}_q^{-1} = P \hat{R}_{q^{-1}} P,$$

$$\hat{R}_q - \hat{R}_q^{-1} = (q - q^{-1})(I - K),$$

где

$$K = \sum_{i,j=1}^N q^{2i-j} \varepsilon_i \varepsilon_j e_{i,j'} \otimes e_{ij'},$$

так что

$$P_q^{(+)} = \frac{1}{q + q^{-1}} \left(\hat{R}_q + q^{-1} I + \frac{q - q^{-1}}{1 - \varepsilon q^{N+1-\varepsilon}} K \right), \quad (1.11)$$

$$P_q^{(-)} = \frac{1}{q + q^{-1}} \left(-\hat{R}_q + q I - \frac{q - q^{-1}}{1 + \varepsilon q^{N-1-\varepsilon}} K \right). \quad (1.12)$$

Рассмотрим теперь алгебру $A_q = A_{R_q}$. В силу (1.10) основное соотношение (1.1) можно переписать в виде

$$C_1 T_1^t C_1^{-1} R_q^{-1} T_2 = T_2 R_q^{-1} C_1 T_1^t C_1^{-1}.$$

Умножим эту формулу на T_1 слева и справа и сравним результат с уравнением $R_q^{-1} T_2 T_1 = T_1 T_2 R_q^{-1}$. Мы приходим к выводу, что в алгебре A_q естественно ввести дополнительные соотношения

$$T C T^t C^{-1} = C T^t C^{-1} T = I. \quad (1.13)$$

О п р е д е л е н и е 11. Факторалгебра $\text{Fun}(G_q)$ алгебры A_q по соотношениям (1.13) называется алгеброй функций на квантовой группе $G_q = SO_q(N)$, если матрица R_q отвечает сериям B_n и D_n , и алгеброй функций на квантовой группе $G_q = Sp_q(n)$, если матрица R_q отвечает серии C_n .

При $q=1$ алгебры $\text{Fun}(SO_q(N))$ и $\text{Fun}(Sp_q(n))$ совпадают соответственно с алгебрами, порожденными координатными функциями на группах Ли $SO(N)$ и $Sp(n)$. (Отметим, что здесь мы используем определение группы Ли $SO(N)$ как группы преобразований $\mathbb{C}^N$, сохраняющих квадратичную форму матрицы C_0).

Т е о р е м а 5. Алгебры $\text{Fun}(SO_q(N))$ и $\text{Fun}(Sp_q(n))$ являются алгебрами Хопфа с коумножением Δ

$$\Delta(T) = T \otimes T,$$

коединицей ε

$$\varepsilon(T) = I$$

и антиподом S

$$S(T) = CT^t C^{-1},$$

обладающим свойством

$$S^2(T) = (CC^t) T (CC^t)^{-1}.$$

Доказательство очевидно.

Введем теперь квантовые векторные пространства, отвечающие квантовым ортогональным и симплектическим группам. Начнем с ортогонального случая и положим в определении 2 $R = R_q$ и

$$f(t) = \frac{t^2 - (q + q^{1-N})t + q^{2-N}}{q^{-1} + q^{1-N}}$$

(напомним, что при этом $\varepsilon = 1$), так что $f(\hat{R}_q) = (q + q^{-1})P_q^{(-)}$, и воспользуемся формулой (1.2).

Определение 12. Алгебра $O_q^N(\mathbb{C})$ с образующими $x_1, \dots, x_N$ и соотношениями

$$\hat{R}_q(x \otimes x) = qx \otimes x - \frac{q - q^{-1}}{1 + q^{N-2}} x^t Cx \cdot J, \quad (1.14)$$

где

$$x^t Cx = \sum_{i,j=1}^N x_i C_{ij} x_j = \sum_{i=1}^N q^{-i} x_i x_i^{\bar{t}},$$

а $J = \sum_{i=1}^N q^{i'} e_i \otimes e_i \in \mathbb{C}^{N^2}$, называется алгеброй функций на квантовом N -мерном евклидовом пространстве.

В явном виде соотношения (1.14) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_i x_j &= q x_j x_i, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad i \neq j', \\ x_i x_{i'} &= x_{i'} x_i + (q^2 - 1) \sum_{j=1}^{i'-1} q^{i'-j} x_j x_{j'} - \frac{q^2 - 1}{1 + q^{N-2}} q^{i'} x^t Cx, \quad 1 \leq i < i' \leq N. \end{aligned}$$

В простейшем случае $N = 3$ они принимают вид

$$x_1 x_2 = q x_2 x_1, \quad x_2 x_3 = q x_3 x_2, \quad x_1 x_3 - x_3 x_1 = \left(q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}} \right) x_2^2$$

и задают алгебру $O_q^3(\mathbb{C})$.

Теорема 6. Ряд Пуанкаре алгебры $O_q^N(\mathbb{C})$ совпадает с рядом Пуанкаре для $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$. В ситуации общего положения центр алгебры $O_q^N(\mathbb{C})$ порождается единицей и элементом $x^t Cx$. Кроме того, «действие» δ квантовой группы $SO_q(N)$ на $O_q^N(\mathbb{C})$ сохраняет квадратичную форму $x^t Cx : \delta(x^t Cx) = 1 \otimes x^t Cx$.

Доказательство теоремы несложно и использует приведенные выше свойства матрицы $\hat{R} = \hat{R}_q$ и соотношения (1.14). Покажем, например, центральность элемента $x^t Cx$. Для этого преобразуем двумя способами выражение $K_{12} \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} \cdot (x \otimes x \otimes x) \in (O_q^N(\mathbb{C}))^{\otimes 3}$, где мы используем обозначения из п. 1.2. С одной стороны, используя уравнение

$$K_{12} \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} = \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} K_{23}$$

— следствие (1.4), справедливое при любом $u \in \mathbb{C}^N$ условие

$$\hat{R}_{12} \hat{R}_{23} (J \otimes u) = u \otimes J \quad (1.15)$$

— следствие (1.10), и определение матрицы K , имеем

$$K_{12} \hat{R}_{23} \hat{R}_{12}(x \otimes x \otimes x) = (J \otimes x) \cdot x^t C x.$$

С другой стороны, применяя дважды соотношение (1.14) и используя вытекающие из (1.15) и определения K формулы

$$K_{12}(u \otimes J) = J \otimes u, \quad K_{12} \hat{R}_{23}(J \otimes u) = q^{N-1} J \otimes u,$$

получим, что

$$K_{12} \hat{R}_{23} \hat{R}_{12}(x \otimes x \otimes x) = q^2 x^t C x \cdot (J \otimes x) + a q (J \otimes x) \cdot x^t C x + a q^{N-1} x^t C x \cdot (J \otimes x),$$

где $a = -\frac{q - q^{-1}}{1 + q^{N-2}}$. Сравнивая эти выражения и используя равенство $q^2 + a q^{N-1} = 1 - a q$, получаем окончательно, что $x^t C x \cdot (J \otimes x) = (J \otimes x) \cdot x^t C x$.

Рассмотрим теперь алгебру $SO_q^N(\mathbb{C})$ — факторалгебру алгебры $O_q^N(\mathbb{C})$ по соотношению $x^t C x = 1$. Условие (1.13), переписанное в виде

$$(T \otimes T) J = J,$$

и формула

$$\hat{R}_q(u \otimes u) = qu \otimes u - (q - q^{-1}) q^{\frac{2-N}{2}} u_1 u_N J,$$

где $u_i = u_1 \delta_{i1} + u_N \delta_{iN}$, $i = 1, \dots, N$, показывают, что вложение $SO_q^N(\mathbb{C}) \hookrightarrow \text{Fun}(SO_q(N))$, задаваемое соответствием $x \mapsto Tu$, $u_1 u_N = \left(q^{\frac{N-2}{2}} + q^{\frac{2-N}{2}}\right)^{-1}$, является гомоморфизмом алгебр. При этом алгебра $SO_q^N(\mathbb{C})$ является левым идеалом и ее естественно рассматривать как алгебру функций на квантовой комплексной $(N-1)$ -мерной ортогональной сфере.

Положим теперь при $q^2 \neq -1$ в определении $2R = R_q$ и

$$f(t) = \frac{t^2 - (q^{1-N} - q^{-1})t - q^{-N}}{q - q^{1-N}},$$

так что $f(\hat{R}_q) = (q + q^{-1})P_q^{(+)}$, и воспользуемся формулой (1.11).

Определение 13. Алгебра $\Lambda_q O^N$, $q^2 \neq -1$, с образующими $x_1, \dots, x_N$ и соотношениями

$$\hat{R}_q(x \otimes x) = -q^{-1} x \otimes x - \frac{q - q^{-1}}{1 - q^N} x^t C x \cdot J \quad (1.16)$$

называется q -внешней алгеброй квантового векторного пространства $O_q^N(\mathbb{C})$.

В явном виде соотношения (1.16) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_i^2 &= 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad i \neq i'; \\ x_i x_j &= -q^{-1} x_j x_i, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad i \neq j', \\ x_i x_{i'} &= -q^2 x_{i'} x_i + (q^2 - 1) \sum_{j=1}^{i'-1} q^{p_{i'} - p_j} x_j x_{j'} - \frac{q^2 - 1}{1 - q^N} q^{p_{i'}} x^t C x, \quad 1 \leq i < i' \leq N. \end{aligned}$$

В простейшем случае $N=3$ они принимают вид

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_3^2 = 0, \quad x_1 x_2 = -q^{-1} x_2 x_1, \quad x_2 x_3 = -q^{-1} x_3 x_2, \\ x_1 x_3 &= -q^{-2} x_3 x_1 + q^{-1} \left(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} \right) x_2^2 \end{aligned}$$

и задают алгебру $\Lambda_q O^3$.

Как и в предыдущем случае, в ситуации общего положения центр алгебры $\Lambda_q O^N$ порождается единицей и элементом $x^t Cx$. Факторалгебра алгебры $\Lambda_q O^N$ по соотношению $x^t Cx = 1$ называется q -алгеброй Клиффорда квантового N -мерного евклидова пространства и обозначается через $\text{Cliff}_q(O^N)$. Алгебра $\text{Cliff}_q(O^N)$ конечномерна.

Другие примеры левых коидеалов, аналогичные введенным в п. 1.3, строятся следующим образом. Рассмотрим подалгебру в $\text{Fun}(\text{SO}_q(N))$, порожденную элементами $x = Tu$, $y = Tv$, где $u_i = u_1 \delta_{i1} + u_N \delta_{iN}$, $v_i = \sqrt{-1} (u_1 \delta_{i1} - u_N \delta_{iN})$, $i = 1, \dots, N$, $u_1 u_N = \left(q^{\frac{N-2}{2}} + q^{\frac{2-N}{2}} \right)^{-1}$. Она задается соотношениями

$$\hat{R}_q(x \otimes x) = qx \otimes x - \frac{q - q^{-1}}{1 + q^{N-2}} J,$$

$$\hat{R}_q(y \otimes y) = qy \otimes y - \frac{q - q^{-1}}{1 + q^{N-2}} J,$$

$$\hat{R}_q(x \otimes y) = (q - q^{-1})x \otimes y + q^{-1}y \otimes x - \frac{(q - q^{-1})(1 - q^{N-2})}{(1 + q^{N-2})^2} J,$$

$$x^t Cx = y^t Cy = 1, \quad y^t Cx = \sqrt{-1} \cdot \frac{1 - q^{N-2}}{1 + q^{N-2}},$$

является левым коидеалом и может быть интерпретирована как алгебра функций $\text{Fun}(\text{SO}_q(N)/\text{SO}_q(N-2))$.

Аналогичным образом можно ввести алгебры $\text{Fun}(\text{SO}_q(N)/\text{SO}_q(N-2k) \times \text{SO}_q(2k))$, $k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

Рассмотрим теперь симплектический случай ($\varepsilon = -1$) и положим в определении $2f(t) = t - q$.

Определение 14. Алгебра $\text{Sp}_q^{2n}(\mathbb{C})$ с образующими $x_1, \dots, x_{2n}$ и соотношениями

$$\hat{R}_q(x \otimes x) = qx \otimes x \quad (1.17)$$

называется алгеброй функций на квантовом $2n$ -мерном симплектическом пространстве.

В явном виде соотношения (1.17) записываются следующим образом:

$$x_i x_j = q x_j x_i, \quad 1 \leq i < j \leq 2n, \quad i \neq j',$$

$$x_i x_{i'} = x_{i'} x_i + (q^2 - 1) \sum_{j=1}^{i'-1} q^{p_{i'} - p_j} \varepsilon_{i'} \varepsilon_j x_j x_{j'}, \quad 1 \leq i < i' \leq 2n.$$

При $n = 1$ в согласии с изоморфизмом $A_1 \approx C_1$ имеем $\text{Sp}_q^2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}_q^2$. Следующий по простоте пример доставляет алгебра $\text{Sp}_q^4(\mathbb{C})$ с образующими x_1, x_2, x_3, x_4 и соотношениями

$$x_1 x_2 = q x_2 x_1, \quad x_1 x_3 = q x_3 x_1, \quad x_2 x_4 = q x_4 x_2, \quad x_3 x_4 = q x_4 x_3, \quad x_2 x_3 = q^2 x_3 x_2 + (q - q^{-1}) x_1 x_4,$$

$$x_4 x_1 = x_1 x_4 + (q^{-2} - 1)(q^{-2} x_1 x_4 + q^{-1} x_2 x_3 - q x_3 x_2) = q^{-2} x_1 x_4.$$

Из приведенных формул следует, что справедливо равенство

$$x^t Cx = q^{-2} x_1 x_4 + q^{-1} x_2 x_3 - q x_3 x_2 - q^2 x_4 x_1 = 0.$$

Как показывает следующая теорема, это соотношение не случайно.

Теорема 7. В алгебре $\text{Sp}_q^{2n}(\mathbb{C})$ справедливо равенство $x^t Cx = \sum_{i=1}^{2n} q^{-p_i \varepsilon_i} \times$

$\times x_i x_i = 0$ и ее ряд Пуанкаре такой же, как и у алгебры $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{2n}]$. «Действие» δ квантовой группы $\mathrm{Sp}_q(n)$ на $\mathrm{Sp}_q^{2n}(\mathbb{C})$ сохраняет билинейную форму $x^t \otimes Cx \in (\mathrm{Sp}_q^{2n}(\mathbb{C}))^{\otimes 2}$: $m_{13}(\delta \otimes \delta)(x^t \otimes Cx) = 1 \otimes x^t \otimes Cx$, где $m: \mathrm{Fun}(\mathrm{Sp}_q(n)) \otimes \mathrm{Fun}(\mathrm{Sp}_q(n)) \rightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{Sp}_q(n))$ — отображение умножения.

Докажем равенство $x^t Cx = 0$. Для этого достаточно воспользоваться вытекающим из (1.12) соотношением

$$\bar{R}_q - qI = (q + q^{-1})P_q^{(-)} - \frac{q - q^{-1}}{1 - q^{2n}}K$$

и очевидными формулами

$$KP_q^{(-)} = 0, \quad K^2 = \text{const} \cdot K, \quad K(x \otimes x) = x^t Cx \cdot J.$$

Вложение $\mathrm{Sp}_q^{2n}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{Sp}_q(n))$, определяемое формулами $x \mapsto Te$, является гомоморфизмом алгебр.

Аналогично рассмотренному выше ортогональному случаю можно определить и левые комодули $\mathrm{Fun}(\mathrm{Sp}_q(n)/\mathrm{Sp}_q(n-1))$ и $\mathrm{Fun}(\mathrm{Sp}_q(n)/\mathrm{Sp}_q(n-k) \times \mathrm{Sp}_q(k))$, $k=1, \dots, n-1$. Так, например, определяющие соотношения алгебры $\mathrm{Fun}(\mathrm{Sp}_q(n)/\mathrm{Sp}_q(n-1))$ получаются из выписанных выше очевидными заменами типа $q^{N-2} \mapsto -q^N$, $N=2n$, поэтому мы их здесь не приводим.

Обсудим теперь вещественные формы квантовых групп $\mathrm{SO}_q(N)$ и $\mathrm{Sp}_q(n)$.

1. Случай $|q|=1$.

Используя соотношения $\bar{R}_q = R_q^{-1}$, $\bar{C}C^t = \varepsilon I$ и рассуждая, как в п. 1.3, заключаем, что соответствующая $\ast$ -антиинволюция имеет вид $T^* = T$.

Определение 15. Алгебрами $\mathrm{Fun}(\mathrm{Sp}_q(n, \mathbb{R}))$ и $\mathrm{Fun}(\mathrm{SO}_q(n, n))$, $N=2n$, $\mathrm{Fun}(\mathrm{SO}_q(n, n+1))$, $N=2n+1$, называются соответственно алгебры $\mathrm{Fun}(\mathrm{Sp}_q(n))$ и $\mathrm{Fun}(\mathrm{SO}_q(N))$, снабженные $\ast$ -антиинволюцией $t_{ij}^* = t_{ij}$, $i, j=1, \dots, N$.

Определение 16. Алгебра $\mathrm{Sp}_q^{2n}(\mathbb{C})$, снабженная антиинволюцией $x_i^* = x_i$, $i=1, \dots, 2n$, называется алгеброй функций на квантовом $2n$ -мерном вещественном симплектическом пространстве и обозначается через $\mathrm{Sp}_q^{2n}(\mathbb{R})$.

Очевидно, что $\delta^*(x) = \delta(x^*)$, так что «действие» квантовой группы $\mathrm{Sp}_q(n, \mathbb{R})$ на $\mathrm{Sp}_q^{2n}(\mathbb{R})$ задается формулой (1.3).

II. Случай $q \in \mathbb{R}$.

Соответствующие $\ast$ -антиинволюции имеют вид

$$T^* = US(T)^t U^{-1} = UC^t T(C^{-1})^t U^{-1},$$

где $U = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, $\varepsilon_i^2 = 1$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{i'}$, $i=1, \dots, N$, и $\varepsilon_i = 1$ при $i=i'$.

Определение 17. Алгеброй $\mathrm{Fun}(\mathrm{SO}_q(N; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N))$ называется алгебра $\mathrm{Fun}(\mathrm{SO}_q(N))$, снабженная $\ast$ -антиинволюцией $t_{ij}^* = \varepsilon_i \varepsilon_j S(t_{ji})$, $i, j=1, \dots, N$. Компактная форма $\mathrm{Fun}(\mathrm{SO}_q(N, \mathbb{R}))$ алгебры $\mathrm{Fun}(\mathrm{SO}_q(N))$ получается при $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_N = 1$ и задается соотношениями $T^* = C^t T(C^{-1})^t$.

Замечание 12. К сожалению, в список вещественных форм не входят квантовые аналоги групп $\mathrm{SO}(p, r)$, $p \neq r$, $p+r=2n$; в частности, мы не определили квантовую группу Лоренца.

Определение 18. Алгебра $O_q^N(\mathbb{C})$, снабженная антиинволюцией $x_i^* = q^{\varepsilon_i} x_i$, $i=1, \dots, N$, называется алгеброй функций на квантовом N -мерном вещественном евклидовом пространстве и обозначается через $O_q^N(\mathbb{R})$.

Поскольку $T^* = C^t T(C^{-1})^t$ и $x^* = C^t x$, то $\delta^*(x) = \delta(x^*)$, и «действие» δ алгебры $\mathrm{Fun}(\mathrm{SO}_q(N, \mathbb{R}))$ на $O_q^N(\mathbb{R})$ сохраняет квадратичную форму $x^t Cx = x^{*t} x$: $\delta(x^{*t} x) = 1 \otimes x^{*t} x$.

Определение 19. Факторалгебра алгебры $O_q^N(\mathbb{R})$ по соотношению $x^*x=1$ называется алгеброй функций на квантовой $(N-1)$ -мерной ортогональной сфере и обозначается через S_q^{N-1} .

З а м е ч а н и е 13. Алгебра S_q^2 была введена в работе [28].

На этом мы заканчиваем определение и описание простейших свойств квантовых простых групп Ли, отвечающих сериям A_{n-1} , B_n , C_n и D_n , $n \geq 1$.

З а м е ч а н и е 14. Проблема определения квантовых групп, отвечающих простым исключительным группам Ли G_2 , F_4 , E_6 , E_7 и E_8 , связана в основном с описанием соответствующих матриц R . Построение матрицы R_q для группы G_2 дано в работе [27].

1.5. Здесь мы объясним, что следует понимать под представлением квантовой группы G_q (конечномерном) векторном пространстве V . Соответствующая ей алгебра функций $\text{Fun}(G_q)$ является алгеброй Хопфа, поэтому для нее имеются две теории представлений — теория представлений $\text{Fun}(G_q)$ как алгебры и теория представлений $\text{Fun}(G_q)$ как коалгебры. В первом случае объектами являются гомоморфизмы алгебр: $\text{Fun}(G_q) \rightarrow \text{End } V$, где $\text{End } V$ — алгебра эндоморфизмов векторного пространства V . При $q=1$ мы приходим к теории представлений коммутативной алгебры $\text{Fun}(G)$ ($C^\infty(G)$, $L^2(G)$ и т. д.), поэтому получающаяся квантовая теория ($q \neq 1$) не очень содержательна. Во втором случае мы имеем дело с гомоморфизмами коалгебр $(\text{End } V)^* \rightarrow \text{Fun}(G_q)$, где $(\text{End } V)^*$ — двойственное пространство к $\text{End } V$, наделенное структурой коалгебры. При $q=1$ мы приходим к обычной теории представлений группы Ли G (точнее, к ее двойственной формулировке).

О п р е д е л е н и е 20. Представлением квантовой группы G_q в векторном пространстве V называется гомоморфизм коалгебр

$$\rho: (\text{End } V)^* \rightarrow \text{Fun}(G_q).$$

Пусть $\{e_\alpha\}$ и $\{e_\alpha^*\}$, $\alpha=1, \dots, M = \dim V$ — двойственные базисы пространств V и V^* соответственно, $e_\alpha^*(e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Тогда представление ρ задается матрицей

$$\tau = (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta=1}^M, \text{ где } \tau_{\alpha\beta} = \rho(e_\alpha^* \otimes e_\beta) \in \text{Fun}(G_q) \text{ и } \Delta(\tau_{\alpha\beta}) = \sum_{\gamma=1}^M \tau_{\alpha\gamma} \otimes \tau_{\gamma\beta}, \alpha, \beta=1, \dots, M.$$

В частности, матрица $\tau = T$ задает фундаментальное представление квантовой группы G_q .

З а м е ч а н и е 15. Такой подход к теории представлений квантовой группы $SU_q(2)$ использовался в работах [7, 8].

В классическом случае ($q=1$) пространство представления V является левым G -модулем. В квантовом случае V является левым $\text{Fun}(G_q)$ -комодулем, где отображение $\delta: V \rightarrow \text{Fun}(G_q) \otimes V$ задается формулой

$$\delta(e_\alpha) = \sum_{\beta=1}^M \tau_{\alpha\beta} \otimes e_\beta, \quad \alpha=1, \dots, M.$$

Ясно и обратное, что (конечномерный) левый $\text{Fun}(G_q)$ -комодуль задает представление квантовой группы G_q в смысле определения 20.

Алгебра $\text{Fun}(G_q)$, рассматриваемая как векторное (бесконечномерное) пространство, является левым $\text{Fun}(G_q)$ -комодулем с $\delta = \Delta$, и соответствующее представление (бесконечномерное) квантовой группы G_q называется регулярным. В компактном случае ясно, как получается квантовый аналог теоремы Петера—Вейля, т. е. разложение регулярного представления на неприводимые. Это связано с тем, что все неприводимые представления квантовой группы G_q конечномерны и являются, в ситуации общего положения, q -деформацией класси-

ческих представлений со старшим весом (см. п. 2.3 в § 2). В некомпактном случае задача о разложении регулярного представления на неприводимые представляется весьма интересной.

Введенные в п. 1.3, 1.4 алгебры $\mathbb{C}_q^n$, R_q^n , U_q^n , $O_q^n(\mathbb{C})$, $\text{Fun}(\text{SL}_q(n)/\text{SL}_q(n-1))$ и т. д., а также их однородные компоненты являются примерами бесконечномерных и конечномерных левых $\text{Fun}(G_q)$ -комодулей. Они оказываются полезными при построении квантовых аналогов сферических функций. Для простейшего случая квантовой группы $\text{SU}_q(2)$ такое построение было проведено в [26] и [29].

Как мы покажем в следующем параграфе, двойственное пространство $\text{Fun}(G_q)^*$ можно рассматривать как квантование универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{G}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G . Таким образом, представлениям квантовой группы Ли G_q будут соответствовать представления квантовой алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

1.6. Рассмотрим снова алгебру A_R , где матрица R удовлетворяет уравнению (1.4). Для случая $R=R_q$ в п. 1.3, 1.4 мы привели естественные дополнительные соотношения на образующие биалгебры A_R , превращающие ее в алгебру Хопфа $\text{Fun}(G_q)$. Здесь мы опишем общую процедуру построения из заданной биалгебры A_R алгебры Хопфа; в случае $R=R_q$ она, естественно, приведет к $\text{Fun}(G_q)$.

Рассмотрим алгебру $\mathbb{C}\langle t_{ij}, \bar{t}_{ij} \rangle$ и положим $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$, $\tilde{T} = (\bar{t}_{ij})_{i,j=1}^n$. Обозначим через $\bar{A}_R$ факторалгебру алгебры $\mathbb{C}\langle t_{ij}, \bar{t}_{ij} \rangle$ по соотношениям

$$RT_1T_2 = T_2T_1R, \quad \tilde{R}T_1\tilde{T}_2 = \tilde{T}_2T_1\tilde{R}, \quad \tilde{\tilde{R}}\tilde{T}_1\tilde{\tilde{T}}_2 = \tilde{\tilde{T}}_2\tilde{T}_1\tilde{\tilde{R}}, \quad (1.18)$$

где

$$\tilde{\tilde{R}} = (R^{t_2})^{-1}, \quad \tilde{\tilde{R}} = R^t$$

(мы предполагаем, что матрица R^{t_2} невырождена). Эти формулы показывают, что в алгебре $\bar{A}_R$ естественны соотношения

$$T\tilde{T}^t = \tilde{T}^tT = I. \quad (1.19)$$

Факторалгебру алгебры $\bar{A}_R$ по этим соотношениям обозначим через H_R .

Теорема 8. Предположим, что матрица R удовлетворяет условию

$$\Gamma(R)P\tilde{R}PK_0 = \text{const } K_0, \quad (1.20)$$

где $\Gamma(R) = (R^{-1})^t$, а $(K_0)_{ij,kl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$, $i, j, k, l = 1, \dots, n$. Тогда H_R является алгеброй Хопфа с коумножением Δ

$$\Delta(T) = T \otimes T, \quad \Delta(\tilde{T}) = \tilde{T} \otimes \tilde{T},$$

коединицей ε

$$\varepsilon(T) = \varepsilon(\tilde{T}) = I$$

и антиподом S

$$S(T) = \tilde{T}^t, \quad S(\tilde{T}) = DT^tD^{-1},$$

где

$$D = \text{tr}_2(P\tilde{R}^t) \in M_n(\mathbb{C}),$$

а tr_2 означает матричный след по второму сомножителю в тензорном произведении $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$.

Доказательство теоремы сводится к непосредственной проверке равенств $\tilde{T}DT^tD^{-1} = DT^tD^{-1}T = I$ с использованием соотношений (1.18), (1.19), формулы (1.20) и определения матрицы D .

Непосредственно проверяется, что матрица $R = R_q$ удовлетворяет условию (1.20) (так, для серий B_n , C_n и D_n оно вытекает из формул (1.10)). При этом соответствие $T \mapsto T$, $\tilde{T} \mapsto S(T)^t$ задает изоморфизм $H_{R_q} \cong \text{Fun}(G_q)$.

Замечание 16. В общем случае биналгебра H_R уже не является алгеброй Хопфа. Однако можно показать, что, наложив дополнительные соотношения $T = WTW^{-1}$, $\tilde{T} = (W^{-1})^t \tilde{T} W^t$ с надлежащей матрицей $W = W(R)$, мы получим алгебру Хопфа (при условии (1.20) $W = \text{const} \cdot I$).

§ 2. Квантование простых алгебр Ли

2.1. Обозначим через $A_R^* = \text{Hom}(A_R, \mathbb{C})$ двойственное пространство к биналгебре A_R . Коумножение Δ в A_R индуцирует умножение в A_R^* :

$$(l_1 l_2, a) \equiv l_1 l_2(a) = (l_1 \otimes l_2)(\Delta(a)),$$

где $l_1, l_2 \in A_R^*$, $a \in A_R$. Таким образом, пространство A_R наделяется структурой $\mathbb{C}$ -алгебры с единицей $1' = \varepsilon$, где $\varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

В алгебре A_R можно выделить естественную подалгебру с образующими $l_{ij}^{(\pm)}$, $i, j = 1, \dots, n$, определяемыми следующим образом. Положим $L^{(\pm)} = (l_{ij}^{(\pm)})_{i,j=1}^n \in M_n(A_R^*)$ и зададим действие матриц-функционалов $L^{(\pm)}$ на однородные элементы степени k алгебры A_R посредством формулы

$$(L^{(\pm)}, T_1 \dots T_k) = R_1^{(\pm)} \dots R_k^{(\pm)}, \quad (2.1)$$

где $T_i = I \otimes \dots \otimes \underset{i}{T} \otimes \dots \otimes I \in M_n^k(A_R)$, $i = 1, \dots, k$, а матрицы $R^{(\pm)} \in M_{n^{k+1}}(\mathbb{C})$ действуют нетривиально только в сомножителях с номерами 0 и 1 тензорного произведения $\underbrace{\mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^n}_{k+1}$ и совпадают там соответственно с матрицами

$$R^{(+)} = PRP, \quad R^{(-)} = R^{-1}.$$

При $k=0$ правая часть формулы (2.1) равна I . В силу уравнения (1.4) и

$$R_{12} R_{23}^{(-)} R_{13}^{(-)} = R_{13}^{(-)} R_{23}^{(-)} R_{12} \quad (2.2)$$

формула (2.1) согласована с соотношениями (1.1) в алгебре A_R .

Определение 2.1. Подалгебра $U_R \subset A_R^*$, порожденная элементами $1'$ и $l_{ij}^{(\pm)}$, $i, j = 1, \dots, n$, называется алгеброй регулярных функционалов на A_R .

Замечание 17. Формула (2.1) может быть интерпретирована как квантовый аналог соотношения (0.8).

Замечание 18. Кажущееся удвоение числа образующих алгебры U_R по сравнению с алгеброй A_R объясняется тем, что, в силу формулы (2.1), некоторые из матричных элементов матриц $L^{(\pm)}$ могут совпадать или быть равными 0, т. е. задавать нулевые функционалы на A_R (см. п. 2.2).

Теорема 9. 1) В алгебре U_R имеют место соотношения

$$\begin{aligned} R^{(+)} L_1^{(\varepsilon)} L_2^{(\varepsilon)} &= L_2^{(\varepsilon)} L_1^{(\varepsilon)} R^{(+)}, \\ R^{(+)} L_1^{(+)} L_2^{(-)} &= L_2^{(-)} L_1^{(+)} R^{(+)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $L_1^{(\varepsilon)} = L^{(\varepsilon)} \otimes I$, $L_2^{(\varepsilon)} = I \otimes L^{(\varepsilon)} \in M_{n^2}(U_R)$, $\varepsilon = \pm$.

2) Алгебра U_R является биналгеброй с коумножением

$$\Delta(1') = 1' \otimes 1', \quad \Delta(l_{ij}^{(\varepsilon)}) = \sum_{k=1}^n l_{ik}^{(\varepsilon)} \otimes l_{kj}^{(\varepsilon)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

или в уже введенных обозначениях

$$\Delta(L^{(\varepsilon)}) = L^{(\varepsilon)} \otimes L^{(\bullet)}, \quad \varepsilon = \pm.$$

Обозначим через Γ отображение из $M_{n^2}(\mathbb{C})$ в $M_{n^2}(\mathbb{C})$, задаваемое формулой $\Gamma(R) = (R^{-1})^t$, и рассмотрим матрицы-функционалы $L_m^{(\pm)} \in A_R^*$, $m \in \mathbb{Z}$, определяемые следующим образом:

$$(L_m^{(\pm)}, T_1 \dots T_k) = \begin{cases} \Gamma^m(R_1^{(\pm)}) \dots \Gamma^m(R_k^{(\pm)}), & m \equiv 0(2), \\ (\Gamma^{m-1}(R_1^{(\pm)}) \dots \Gamma^{m-1}(R_k^{(\pm)}))^{-1}, & m \equiv 1(2). \end{cases}$$

В силу уравнений (1.4) и (2.2) эти формулы согласованы с соотношениями (1.1) в алгебре A_R . Обозначим через $\hat{U}_R$ подалгебру в A_R^* , порожденную элементами

$$l_{m,ij}^{(\pm)}, m \in \mathbb{Z}, l_{0,ij}^{(\pm)} = l_{ij}^{(\pm)}, i, j = 1, \dots, n,$$

так что $U_R \subset \hat{U}_R$.

Теорема 10. Алгебра $\hat{U}_R$ является алгеброй Хопфа с коумножением Δ

$$\begin{aligned} \Delta(L_m^{(\pm)}) &= L_m^{(\pm)} \otimes L_m^{(\pm)}, \quad m \equiv 0(2), \\ \Delta((L_m^{(\pm)})^t) &= (L_m^{(\pm)})^t \otimes (L_m^{(\pm)})^t, \quad m \equiv 1(2), \end{aligned}$$

коединицей ε

$$\varepsilon(L_m^{(\pm)}) = I$$

и антиподом S

$$S(L_m^{(\pm)}) = L_{m+1}^{(\pm)}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Замечание 19. Алгебру A_R можно рассматривать как подалгебру к двойственной к $\hat{U}_R$ алгебре Хопфа $\hat{U}_R^*$. Таким способом можно превратить и саму A_R в алгебру Хопфа. Эта конструкция двойственна к упомянутой в замечании 16.

Замечание 20. Формула

$$l(a) = (l \otimes \text{id}, \Delta(a)), \quad l \in A_R^*, a \in A_R$$

задает линейное действие алгебры A_R^* на A_R . Его можно интерпретировать как действие «квантовыми левоинвариантными дифференциальными операторами». В частности, для образующих $L_m^{(\pm)}$ получаем

$$L_m^{(\pm)}(T_1 \dots T_k) = \begin{cases} \Gamma^m(R_1^{(\pm)}) \dots \Gamma^m(R_k^{(\pm)})(I \otimes T_1 \dots T_k), & m \equiv 0(2), \\ (\Gamma^{m-1}(R_1^{(\pm)}) \dots \Gamma^{m-1}(R_k^{(\pm)}))^{-1}(I \otimes T_1 \dots T_k), & m \equiv 1(2), \end{cases}$$

где мы положили

$$(L_m^{(\pm)}(T_1 \dots T_k))_{i_0 \dots i_k, j_0 \dots j_k} = l_{m, i_0 j_0}^{(\pm)}(t_{i_1 j_1} \dots t_{i_k j_k}).$$

2.2. Рассмотрим случай, когда матрица R отвечает простой алгебре Ли классического типа и положим $R = cR_q$, где R_q дается формулами (1.8)–(1.9), а $c = q^{-\frac{1}{n}}$ для серии A_{n-1} и $c = 1$ для остальных серий; при такой нормировке $\det R = 1$. Поскольку матрица R_q нижне-треугольна (см. (1.8), (1.9)), то из (2.1) следует, что матрица $L^{(+)}$ верхне-треугольна, а $L^{(-)}$ — нижне-треугольна; далее, в силу $\det R = 1$ имеем $l_{11}^{(+)} \dots l_{NN}^{(+)} = 1$, $l_{ii}^{(+)} l_{ii}^{(-)} = l_{ii}^{(-)} l_{ii}^{(+)} = 1$, $i = 1, \dots, N$. Рассмотрим также алгебру $\text{Fun}(G_q)$, где G_q — квантовая простая группа Ли и обозначим через S_q ее антипод.

Теорема 11. В случае $R = cR_q$ алгебра U_R является подалгеброй Хопфа в $\text{Fun}(G_q)^*$, причем

$$S(L^{(\pm)}) = S_{q^{-1}}(L^{(\pm)}).$$

Эта теорема означает, что спаривание алгебр U_R и $\text{Fun}(G_q)$, задаваемое формулой (2.1) корректно определено и $U_R = \hat{U}_R$, а антипод $S(L^{\pm})$ в случае серии A_{n-1} задается формулами из теоремы 4 с заменой $q \mapsto q^{-1}$, а в случае серий B_n , C_n и D_n

$$S(L^{\pm}) = C^t (L^{\pm})^t (C^{-1})^t.$$

Замечание 21. Условия верхне- и нижне-треугольности матриц $L^{\pm}$, равенства $l_{11}^{(+)} \dots l_{NN}^{(+)} = 1$, $l_{ii}^{(+)} l_{ii}^{(-)} = l_{ii}^{(-)} l_{ii}^{(+)} = 1$, $i = 1, \dots, N$, и соотношения (2.3) полностью характеризуют алгебру U_R в случае серии A_{n-1} ($N = n$). В случае серий B_n , C_n и D_n к ним следует добавить условия

$$L^{\pm} C^t (L^{\pm})^t (C^{-1})^t = C^t [(L^{\pm})^t (C^{-1})^t L^{\pm}] = I.$$

Таким образом, алгебра U_R имеет столько же образующих, сколько и алгебра $\text{Fun}(G_q)$.

Итак, при $R = cR_q$ алгебру U_R естественно обозначать через $\text{Fun}(G_q)_{reg}^*$. Сравним алгебру $\text{Fun}(G_q)_{reg}^*$, $q = e^h$, с введенной в работах [12, 13, 16, 17] алгеброй $U_h \mathfrak{G}$ — квантовой универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы Ли G .

Пусть $\mathfrak{G}$ — простая алгебра Ли ранга r , $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — ее простые корни, а A — матрица Картана; $A_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)$, $i, j = 1, \dots, r$, где $(,)$ — инвариантное скалярное произведение. Алгеброй $U_h \mathfrak{G}$, $h \in \mathbb{C}$, называется (см. [12, 13, 16, 17]) $\mathbb{C}[[h]]$ -алгебра с образующими H_i , $X_i^{\pm}$, $i = 1, \dots, r$, и соотношениями

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \quad [H_i, X_j^{\pm}] = \pm (\alpha_i, \alpha_j) X_j^{\pm}, \\ [X_i^{\pm}, X_j^{\pm}] &= \delta_{ij} \frac{\text{sh}(hH_i)}{\text{sh}(h)}, \quad i, j = 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k}_{q_i} q_i^{-\frac{k(m-k)}{2}} (X_i^{\pm})^k X_j^{\pm} (X_i^{\pm})^{m-k} = 0 \quad (2.6)$$

при $i \neq j$, где $m = 1 - A_{ij}$, $q_i = e^{h(\alpha_i, \alpha_i)}$, а $\binom{m}{k}_q$ — многочлен Гаусса, т. е.

$$\binom{m}{k}_q = \frac{(q^m - 1)(q^{m-1} - 1) \dots (q^{m-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \dots (q - 1)}.$$

При $h \rightarrow 0$ $U_h \mathfrak{G}$ превращается в универсальную обертывающую алгебру $U \mathfrak{G}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Образующие H_i , $X_i^{\pm}$, $i = 1, \dots, r$, играют роль квантового аналога базиса Шевалле; в случае $\mathfrak{G} = \mathfrak{sl}(2)$ соотношения (2.5) переходят в (0.2) и алгебра $U_h \mathfrak{G}$ совпадает с алгеброй U_h из Введения.

Алгебра $U_h \mathfrak{G}$ является алгеброй Хопфа с коумножением Δ

$$\begin{aligned} \Delta(H_i) &= H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i, \\ \Delta(X_i^{\pm}) &= X_i^{\pm} \otimes e^{-\frac{hH_i}{2}} + e^{\frac{hH_i}{2}} \otimes X_i^{\pm}, \quad i = 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (2.7)$$

и антиподом S

$$S(H_i) = -H_i, \quad S(X_i^{\pm}) = e^{-h\rho} X_i^{\pm} e^{h\rho}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.8)$$

Здесь $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} H_{\alpha}$, где Δ_+ — множество положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{G}$,

и для $\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$ мы полагаем $H_{\alpha} = \sum_{i=1}^r n_i H_i$. В случае $\mathfrak{G} = \mathfrak{sl}(2)$ формулы

(2.7), (2.8) переходят в (0.4), (0.5) и были получены в [15].

В общем случае эти формулы получены в работах [12, 13], [16, 17].

Алгебры $U_h \mathfrak{b}_+$ и $U_h \mathfrak{b}_-$, порожденные соответственно элементами H_i, X_i^+ и $H_i, X_i^-, i=1, \dots, r$, являются подалгебрами Хопфа в $U_h \mathfrak{G}$ и представляют собой квантование борелевских подалгебр $\mathfrak{b}_\pm$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Обозначим через $\hat{U}_h \mathfrak{G}$ подалгебру Хопфа в $U_h \mathfrak{G}$, порожденную элементами $X_i^\pm$ и элементами $e^{h\tilde{H}_i}$, где $H_i = \tilde{H}_i - \tilde{H}_{i+1}$, $\sum_{i=1}^n \tilde{H}_i = 0$ в случае серии A_{n-1} , и элементами $e^{\frac{hH_i}{2}}, i=1, \dots, N$ — в случае серий B_n, C_n и D_n .

Теорема 12. Обозначим через $\text{Fun}(G_q)_0^*$ расширение алгебры $\text{Fun}(G_q)_{\text{reg}}^*$ при помощи элементов $\left(l_{ii}^{(+)} \right)_{i+1}^{\pm \frac{1}{2}}, (l_{ii}^{(+)} l_{i+1}^{(+)} l_{i+1}^{\pm \frac{1}{2}})^{\pm \frac{1}{2}}, i=1, \dots, N-1$. Имеет место изоморфизм

$$\text{Fun}(G_q)_0^* \cong \hat{U}_h \mathfrak{G}, \quad q = e^h,$$

где для серии A_{n-1}

$$\begin{aligned} l_{ii}^{(+)} &= e^{h\tilde{H}_i}, \\ l_{i+1}^{(+)} &= (q - q^{-1}) q^{\frac{n-2}{2n}} X_i^+ e^{\frac{h}{2}(\tilde{H}_i + \tilde{H}_{i+1})}, \\ l_{i+1}^{(-)} &= -(q - q^{-1}) q^{\frac{2-n}{2n}} X_i^- e^{-\frac{h}{2}(\tilde{H}_i + \tilde{H}_{i+1})}, \\ i &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

а для серии B_n

$$\begin{aligned} l_{ii}^{(+)} &= e^{h\tilde{H}_i}, \\ l_{i+1}^{(+)} &= (q - q^{-1}) q^{-\frac{1}{2}} X_i^+ e^{\frac{h}{2}(\tilde{H}_i + \tilde{H}_{i+1})}, \\ l_{i+1}^{(-)} &= -(q - q^{-1}) q^{\frac{1}{2}} X_i^- e^{-\frac{h}{2}(\tilde{H}_i + \tilde{H}_{i+1})}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ l_{nn}^{(+)} &= e^{h\tilde{H}_n}, \\ l_{n+1}^{(+)} &= (q - q^{-1}) q^{-\frac{1}{2}} X_n^+ e^{\frac{h\tilde{H}_n}{2}}, \\ l_{n+1}^{(-)} &= -(q - q^{-1}) q^{\frac{1}{2}} X_n^- e^{-\frac{h\tilde{H}_n}{2}}, \end{aligned}$$

где

$$H_i = \tilde{H}_i - \tilde{H}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \tilde{H}_n = H_n.$$

Для серий C_n, D_n элементы $l_{ii}^{(+)}, l_{i+1}^{(+)}, l_{i+1}^{(-)}, i=1, \dots, n-1$, задаются предыдущими формулами, где $2\tilde{H}_n = H_n$ и $H_n = \tilde{H}_{n-1} + \tilde{H}_n$ соответственно, а

$$l_{nn}^{(+)} = e^{h\tilde{H}_n}, \quad l_{n+1}^{(+)} = (q - q^{-1}) X_n^+, \quad l_{n+1}^{(-)} = -(q - q^{-1}) X_n^-$$

для серии C_n и

$$\begin{aligned} l_{nn}^{(+)} &= e^{h\tilde{H}_n}, \\ l_{n-1}^{(+)} l_{n+1} &= (q - q^{-1}) q^{-\frac{1}{2}} X_n^+ e^{\frac{h}{2}(\tilde{H}_{n-1} - \tilde{H}_n)}, \\ l_{n+1}^{(-)} l_{n-1} &= -(q - q^{-1}) q^{\frac{1}{2}} X_n^- e^{-\frac{h}{2}(\tilde{H}_{n-1} - \tilde{H}_n)} \end{aligned}$$

для серии D_n .

Эта теорема доказывается прямым вычислением — расписыванием соотношений (2.3) с учетом формул (1.8), (1.9). В частности, сложные соотношения (2.6) для образующих квантового базиса Шевалле и формулы (2.7) следуют из простых формул (2.2) и (2.4).

Замечание 22. Теорема 12 показывает, что надлежащим образом пополненная алгебра $\text{Fun}(G_q)^*_{\text{reg}}$ изоморфна алгебре $U_h \mathfrak{G}$.

Теорема 13. Элементы $X_{ij}^\pm$, $e^{\pm h H_{ij}} \in \text{Fun}(G_q)_0^*$,

$$e^{\pm h H_{ij}} = (l_{ii}^{(+)} l_{jj}^{(+)-1})^{\pm \frac{11}{2}},$$

$$X_{ij}^+ = (q - q^{-1})^{-1} l_{ij}^{(+)} (l_{ii}^{(+)} l_{jj}^{(+)-1})^{\frac{1}{2}},$$

$$X_{ij}^- = -(q - q^{-1})^{-1} l_{ij}^{(-)} (l_{ii}^{(+)} l_{jj}^{(+)-1})^{-\frac{1}{2}}, \quad q = e^h,$$

где $1 \leq i < j \leq N$, $i < i'$, $j < j'$, порождают квантовые $\mathfrak{sl}(2)$ -тройки, т. е. подалгебры Хопфа в $\text{Fun}(G_q)_0^*$, изоморфные $\hat{U}_h \mathfrak{sl}(2)$.

Эта теорема также доказывается непосредственным вычислением. Она показывает, что образующие $l_{ii}^{(+)}$, $l_{jj}^{(+)}$, $l_{ii}^{(-)}$, $l_{jj}^{(-)}$, $1 \leq i < j \leq N$, $i < i'$, $j < j'$, играют роль квантового аналога базиса Картана—Вейля в $\text{Fun}(G_q)_0^*$. Часто этот базис оказывается более удобным, чем базис Шевалле. Так, например, в терминах этого базиса имеются относительно простые формулы для образующих центра алгебры $\text{Fun}(G_q)_0^*$.

Теорема 14. В ситуации общего положения центр алгебры $\text{Fun}(G_q)_0^*$ порождается единицей и элементами

$$c_k = \text{tr}(q^{2r} (L^{(+)} S(L^{-}))^k), \quad k = 1, \dots, r = \text{rank}(\mathfrak{G}).$$

Доказательство теоремы использует формулы (1.10) и соотношения (2.3).

Для центра алгебры $\text{Fun}(\text{SL}_q(n))_0^*$ можно указать и другую, более простую систему образующих:

$$\tilde{c}_k = \sum_{\sigma, \sigma' \in \text{Sym}(n)} (-q)^{l(\sigma) + l(\sigma')} l_{\sigma_1 \sigma'_1}^{(+)} \dots l_{\sigma_k \sigma'_k}^{(+)} l_{\sigma_{k+1} \sigma'_{k+1}}^{(-)} \dots l_{\sigma_n \sigma'_n}^{(-)}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

2.3. Теория конечномерных представлений алгебр $\text{Fun}(G_q)_0^*$ и $U_h \mathfrak{G}$ параллельна теории представлений алгебры $U \mathfrak{G}$; в случае $\mathfrak{G} = \mathfrak{sl}(2)$ соответствующие $U_h \mathfrak{G}$ -модули были построены в [10, 30]. Как показано в [31, 32], в ситуации общего положения $\mathfrak{G}$ -модули со старшим весом при квантовании не деформируются, так что $U_h \mathfrak{G}$ -модули имеют те же размерности, кратности весов и параметризацию, что и $\mathfrak{G}$ -модули. Так, для простой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ классического типа векторное представление ρ алгебры $U_h \mathfrak{G}$ на образующих базиса Шевалле задается теми же формулами, что и в классическом случае $h=0$. В частности, из теоремы 12 получаем, в согласии с (2.3), что

$$(\rho \otimes \text{id})((L^{(\pm)})^i) = \sum_{i, j=1}^N \rho(l_{ji}^{(\pm)}) \otimes e_{ij} = R^{(\pm)}.$$

В случае, когда $q^l=1$ для какого-нибудь натурального l , алгебра $U_h \mathfrak{G}$ теряет полупростоту и в ней выделяется конечномерная полупростая факторалгебра. Теория представлений этой факторалгебры имеет интересные приложения [33].

Другой содержательной задачей теории представлений алгебр $\text{Fun}(G_q)_0^*$ и $U_h \mathfrak{G}$ является построение квантового аналога группы Вейля. Элемент Вейля для простейшего случая $\mathfrak{G} = \mathfrak{sl}(2)$ был построен в работах [26, 34]; по поводу общего случая см. [31].

З а м е ч а н и е 23. Другой интересной задачей является вопрос, когда (в надлежащей топологии) алгебра $\text{Fun}(G_q)$ является рефлексивной, т. е.

$\text{Fun}(G_q)^{**} = \text{Fun}(G_q)$. Можно показать, что ответ является положительным в случае вещественных компактных форм серий A_{n-1} и C_n . В случае серий B_n и D_n $\text{Fun}(G_q) \neq (U_h \mathfrak{G})^*$, $q = e^h$, (так, при $q = 1$ в алгебру $\text{Fun}(G)$ не входят матричные элементы двузначных, т. е. спинорных, представлений G).

§ 3. Квантовый дубль

3.1. Пусть A — алгебра Хопфа, A^* — двойственное пространство к A , канонически наделенное структурой алгебры Хопфа, а A^0 — алгебра Хопфа A^* с противоположным коумножением. Как показано в [13] с алгеброй A канонически ассоциируется алгебра Хопфа $\mathcal{D}(A)$, определяемая следующим образом:

- 1) как коалгебра $\mathcal{D}(A) = A \otimes A^0$;
- 2) алгебры A и A^0 вложены в $\mathcal{D}(A)$ как подалгебры Хопфа;
- 3) для любого $a \in \mathcal{D}(A)$ справедливо равенство

$$\mathcal{R} \Delta(a) = (\sigma \circ \Delta)(a) \mathcal{R}, \quad (3.1)$$

где Δ — коумножение в $\mathcal{D}(A)$, σ — оператор перестановки в $\mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)$: $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$, $a, b \in \mathcal{D}(A)$, а $\mathcal{R}$ — образ канонического элемента в $A \otimes A^0$ при вложении $A \otimes A^0 \hookrightarrow \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)$. Именно пусть $\{e_s\}_{s \in J}$ — линейный базис алгебры A , $\{e^s\}_{s \in J}$ — базис в A^* , двойственный к $\{e_s\}_{s \in J}$, а $\hat{e}_s, \hat{e}^s$ — образы элементов e_s, e^s при вложении $A, A^0 \hookrightarrow \mathcal{D}(A)$. В этих обозначениях

$$\mathcal{R} = \sum_{s \in J} \hat{e}_s \otimes \hat{e}^s.$$

Смысл условия 3) состоит в том, что оно характеризует операцию произведения для вложенных в $\mathcal{D}(A)$ подалгебр Хопфа A и A^0 .

Алгебра $\mathcal{D}(A)$ называется квантовым дублем алгебры Хопфа A .

Из определения квантового дубля непосредственно следует [13], что

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) &= \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}, \\ (S \otimes \text{id})(\mathcal{R}) &= (\text{id} \otimes S^{-1})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1}, \end{aligned}$$

где S — антипод в алгебре Хопфа $\mathcal{D}(A)$, а

$$\mathcal{R}_{13} = \sum_{s \in J} \hat{e}_s \otimes 1 \otimes \hat{e}^s, \quad \mathcal{R}_{23} = \sum_{s \in J} 1 \otimes \hat{e}_s \otimes \hat{e}^s, \quad \mathcal{R}_{12} = \sum_{s \in J} \hat{e}_s \otimes \hat{e}^s \otimes 1,$$

$$\mathcal{R}_{12}, \mathcal{R}_{13}, \mathcal{R}_{23} \in \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A).$$

Из условия (3.1) и приведенных формул немедленно вытекает, что матрица $\mathcal{R}$ удовлетворяет уравнению (0.7) в «абстрактной форме»

$$\mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}, \quad \mathcal{R} \in \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A).$$

Пусть $X = \sum_i a^i \otimes b_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ и алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются сомножителями в тензорном произведении $\mathcal{C}$ -алгебр $\dots \otimes_k \mathcal{A} \otimes \dots \otimes_l \mathcal{B} \otimes \dots$, где k и l — номера сомножителей. Элемент $\sum_i 1 \otimes \dots \otimes_k a^i \otimes \dots \otimes_l b_i \otimes \dots \otimes 1$, принадлежащий этому тензорному произведению, будем обозначать через X_{kl} и, если это не будет вызывать недоразумений, структуру остальных сомножителей указывать не будем.

Покажем теперь, как в рассматриваемой общей ситуации возникает «абстрактная форма» формулы (0.6). Обозначим через $\mathcal{D}(A)^*$ двойственное пространство

к $\mathcal{D}(A)$, наделенное структурой алгебры Хопфа с коумножением Δ^* и антиподом S^* . Пусть $\{f_i^*\}_{i \in J}$ — линейный базис в $\mathcal{D}(A)^*$, двойственный базису $\{\hat{e}_s, \hat{e}^t\}_{s, t \in J}$ в $\mathcal{D}(A)$.

Теорема 15. 1) Для элемента

$$\mathcal{T} = \sum_{s, t \in J} \hat{e}_s \hat{e}^t \otimes f_i^* \in \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)^*$$

справедливы соотношения

$$(\Delta \otimes \text{id})\mathcal{T} = \mathcal{T}_{13}\mathcal{T}_{23} \in \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)^*, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta^*)\mathcal{T} &= \mathcal{T}_{12}\mathcal{T}_{13} \in \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)^* \otimes \mathcal{D}(A)^*, \\ (S \otimes \text{id})\mathcal{T} &= (\text{id} \otimes S^*)\mathcal{T}, \\ \mathcal{R}_{12}\mathcal{T}_{13}\mathcal{T}_{23} &= \mathcal{T}_{23}\mathcal{T}_{13}\mathcal{R}_{12}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

2) Пусть F — ассоциативная алгебра с базисом $f_i^*, s, t \in J$, и соотношениями

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{T}_{13}\mathcal{T}_{23} = \mathcal{T}_{231}\mathcal{T}_{32}\mathcal{R}_{12} \in \mathcal{D}(A) \otimes F \otimes F,$$

где

$$\mathcal{T} = \sum_{s, t \in J} \hat{e}_s \hat{e}^t \otimes f_i^* \in \mathcal{D}(A) \otimes F.$$

Тогда формулы

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta_F)\mathcal{T} &= \mathcal{T}_{12}\mathcal{T}_{13} \in \mathcal{D}(A) \otimes F \otimes F, \\ (\text{id} \otimes S_F)\mathcal{T} &= (S \otimes \text{id})\mathcal{T}, \end{aligned}$$

задают на F структуру алгебры Хопфа с коумножением Δ_F и антиподом S_F .

3) Соответствие $f_i^* \mapsto \hat{f}_i^*$ устанавливает изоморфизм алгебр Хопфа $\mathcal{D}(A)^*$ и F .

Эта теорема была сформулирована в [35] и непосредственно вытекает из приведенных выше определений. Формулы (3.2) и (3.3) реализуют, в общей ситуации, конкретные формулы (0.3) и (0.6).

Следующая теорема, также приведенная в [35], объясняет, в общей ситуации, соотношения (2.3) и (2.4).

Теорема 16. 1) Пусть

$$\mathcal{L}^{(+)} = \sum_{s \in J} \hat{e}^s \otimes \hat{e}_s = \sigma(\mathcal{R}), \quad \mathcal{L}^{(-)} = \sum_{s \in J} S(\hat{e}_s) \otimes \hat{e}^s = \mathcal{R}^{-1} \in \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A).$$

Справедливы соотношения

$$\mathcal{R}_{12}^{(+)}\mathcal{L}_{13}^{(\varepsilon)}\mathcal{L}_{23}^{(\varepsilon)} = \mathcal{L}_{23}^{(\varepsilon)}\mathcal{L}_{13}^{(\varepsilon)}\mathcal{R}_{12}^{(+)}, \quad \varepsilon = \pm, \quad \mathcal{R}_{12}^{(+)}\mathcal{L}_{13}^{(+)}\mathcal{L}_{23}^{(-)} = \mathcal{L}_{23}^{(-)}\mathcal{L}_{13}^{(+)}\mathcal{R}_{12}^{(+)}, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{L}^{(\varepsilon)}) &= \mathcal{L}_{12}^{(\varepsilon)}\mathcal{L}_{13}^{(\varepsilon)}, \\ (\text{id} \otimes S)(\mathcal{L}^{(\varepsilon)}) &= (S^{-1} \otimes \text{id})(\mathcal{L}^{(\varepsilon)}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\mathcal{R}_{12}^{(+)} = (\sigma \otimes \text{id})(\mathcal{R}_{12})$.

2) Пусть H — ассоциативная алгебра с базисом $h_s, h^t, s, t \in J$, и соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}^{(+)}\tilde{\mathcal{L}}_{13}^{(\varepsilon)}\tilde{\mathcal{L}}_{23}^{(\varepsilon)} &= \tilde{\mathcal{L}}_{23}^{(\varepsilon)}\tilde{\mathcal{L}}_{13}^{(\varepsilon)}\mathcal{R}_{12}^{(+)}, \quad \varepsilon = \pm, \\ \mathcal{R}_{12}^{(+)}\tilde{\mathcal{L}}_{13}^{(+)}\tilde{\mathcal{L}}_{23}^{(-)} &= \tilde{\mathcal{L}}_{23}^{(-)}\tilde{\mathcal{L}}_{13}^{(+)}\mathcal{R}_{12}^{(+)}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(+)} = \sum_{s \in J} \hat{e}^s \otimes h_s, \quad \tilde{\mathcal{L}}^{(-)} = \sum_{s \in J} S(\hat{e}_s) \otimes h^s \in \mathcal{D}(A) \otimes H.$$

Тогда формулы

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta_H)(\tilde{\mathcal{L}}^{(\varepsilon)}) &= \tilde{\mathcal{L}}_{12}^{(\varepsilon)}\tilde{\mathcal{L}}_{13}^{(\varepsilon)} \in \mathcal{D}(A) \otimes H \otimes H, \\ (\text{id} \otimes S_H)(\tilde{\mathcal{L}}^{(\varepsilon)}) &= (S^{-1} \otimes \text{id})(\tilde{\mathcal{L}}^{(\varepsilon)}), \quad \varepsilon = \pm, \end{aligned}$$

задают на H структуру алгебры Хопфа с коумножением Δ_H и антиподом S_H .

3) Соотношение $\hat{e}_s \mapsto h_s, \hat{e}^s \mapsto h^s$ устанавливает изоморфизм алгебр Хопфа $\mathcal{D}(A)$ и H .

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из приведенных выше определений.

Используя теоремы 15 и 16, приходим, в общей ситуации, к «абстрактной форме» спаривания (2.1).

Теорема 17. Имеет место соотношение

$$(\mathcal{L}^{(\pm)}, \mathcal{T}_1 \dots \mathcal{T}_k) = \mathcal{R}_1^{(\pm)} \dots \mathcal{R}_k^{(\pm)}, \quad (3.6)$$

где

$$\mathcal{T}_i = \sum_{s, t \in J} f_i^s \otimes 1 \otimes \dots \otimes \underbrace{\hat{e}_s \hat{e}^t}_{i} \otimes \dots \otimes 1 \in \mathcal{D}(A)^* \otimes \underbrace{\mathcal{D}(A) \otimes \dots \otimes \mathcal{D}(A)}_k,$$

а $\mathcal{R}_i^{(\pm)}$ есть образ элемента $\mathcal{R}^{(\pm)} \in \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)$,

$$\mathcal{R}^{(+)} = \sigma(\mathcal{R}), \quad \mathcal{R}^{(-)} = \mathcal{R}^{-1},$$

при вложении $\mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathcal{D}(A)^{\otimes k+1}$, задаваемом формулой

$$a \otimes b \mapsto a \otimes 1 \otimes \dots \otimes \underbrace{b}_{i+1} \otimes \dots \otimes 1, \quad a, b \in \mathcal{D}(A), \quad i = 1, \dots, k.$$

Обозначение $(\dots)$ в формуле (3.6) понимается следующим образом: $(a \otimes b, l \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k) = l(b) \cdot a \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k$, где $a, a_1, \dots, a_k, b \in \mathcal{D}(A)$, $l \in \mathcal{D}(A)^*$.

Итак, мы показали, как основные объекты — «универсальные матрицы» $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{L}^{(\pm)}$ и алгебраические соотношения между ними из § 1, 2 — получаются из абстрактной конструкции квантового дубля.

3.2. Здесь мы покажем, как универсальные матрицы $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$ и $\mathcal{L}^{(\pm)}$ связаны с введенными в § 1, 2 конкретными матрицами R , T и $L^{(\pm)}$.

Пусть $\mathfrak{G}$ — простая алгебра Ли классического типа, а $\mathfrak{B}_{\pm}$ и $\mathfrak{S}$ — ее борелевские и картановская подалгебры. Положим в общих рассуждениях п. 3.1 $A = U_h \mathfrak{B}_+$ (см. п. 2.2). Тогда, как показано в [13], $\mathcal{D}(A) \cong U_h \mathfrak{G} \otimes U \mathfrak{S}$. Рассмотрим естественные проекции

$$\mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A) \rightarrow U_h \mathfrak{G} \otimes U_h \mathfrak{G}, \quad \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)^* \rightarrow U_h \mathfrak{G} \otimes (U_h \mathfrak{G})^*$$

и для образов универсальных матриц $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$ и $\mathcal{L}^{(\pm)}$ сохраним те же обозначения.

Теорема 18. Пусть $\mathfrak{G}$ — простая алгебра Ли классического типа, $\mathcal{R} \in U_h \mathfrak{G} \otimes U_h \mathfrak{G}$, $\mathcal{T} \in U_h \mathfrak{G} \otimes (U_h \mathfrak{G})^*$ — универсальные матрицы, а ρ — векторное представление $U_h \mathfrak{G}$.

Тогда

$$(\rho \otimes \rho)(\mathcal{R}) = R_q, \quad (3.7)$$

где R_q — матрица вида (1.8), (1.9) для серий A_{n-1} , B_n , C_n и D_n ;

$$(\rho \otimes \text{id})(\mathcal{T}) = T, \quad (3.8)$$

где T — порождающая матрица алгебры $\text{Fun}(G_q)$, а G — группа Ли алгебры Ли $\mathfrak{G}$;

$$(\rho \otimes \text{id})(\mathcal{R}^{(\pm)}) = (L^{(\pm)})^t,$$

где $L^{(\pm)}$ — порождающие матрицы алгебры $\text{Fun}(G_q)_{\text{reg}}^*$.

В случае $\mathfrak{G} = \mathfrak{sl}(n)$ формулы (3.7), (3.8) были приведены в работе [13].

Заключение

В настоящей работе мы построили содержательные примеры деформаций структур групп Ли и алгебр Ли. Построенные деформации зависят от одного комплексного параметра q и связаны со специальными решениями уравнения

(0.7). В свою очередь эти решения возникли в процессе развития квантового метода обратной задачи, в рамках которого уравнение (0.7), по нашему предложению [2], носит название уравнения Янга—Бакстера.

Интересной является задача о выяснении внутреннего смысла и выделенности построенных нами одномерных деформаций по сравнению с более общей конструкцией квадратичных алгебр, развитой Ю. М. Маниным [21].

В данную статью не вошли следующие темы, кратко затронутые в нашем препринте [19].

1. Бесконечномерный случай групп и алгебр петель. Следует сказать, что именно эти примеры впервые появились в рамках квантового метода обратной задачи и послужили источником развития понятия квантовых групп. Однако систематическое изложение квантовых групп и алгебр петель требует привлечения методов топологии и анализа, что выходит за рамки нашей чисто алгебраической статьи.

2. Квазиклассический предел $q \rightarrow 1$ ($\hbar \rightarrow 0$). В этом пределе на группах Ли и алгебрах Ли возникают пуассоновы структуры, естественно описываемые классической r -матрицей [36]. В частности, в их числе возникают структуры групп Ли—Пуассона [37] и биалгебр Ли [13, 38]. Эти структуры в свою очередь играют важную роль в гамильтоновой интерпретации классического метода обратной задачи [36].

Как нам представляется, развитый здесь формализм является началом многообещающей теории с возможными интересными приложениями. Помимо квантового метода обратной задачи, мы можем упомянуть приложения и к теории узлов [27, 39, 40], и к комбинаторике [41]. Однако настоящее место этой теории определится лишь в процессе ее дальнейшего развития.

Л и т е р а т у р а

- [1] Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи. I // Теорет. мат. физика. 1979. Т. 40. С. 194—220.
- [2] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 5. С. 43—63.
- [3] Faddeev L. D. Quantum completely integrable models in field theory // Soviet Sci. Rev. Sect. C: Math. Phys. Rev. 1980. Vol. 1. P. 107—155.
- [4] Изергин А. Г., Корешин В. Е. Квантовый метод обратной задачи // Физика ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 501—541.
- [5] Kulish P. P., Sklyanin E. K. Quantum spectral transform method. Recent developments // Lect. Notes Physics. 1984. Vol. 151. P. 61—119.
- [6] Faddeev L. D. Integrable Models in 1+1-Dimensional Quantum Field Theory // Les Houches Lectures 1982. Amsterdam: Elsevier, 1984. 300 p.
- [7] Woronowicz S. L. Twisted SU (2) group. An example of noncommutative differential calculus // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1987. Vol. 23. P. 117—181.
- [8] Woronowicz S. L. Compact matrix pseudogroups // Com. Math. Phys. 1987. Vol. 111. P. 613—665.
- [9] Faddeev L. D., Takhtajan L. A. Liouville model on the lattice // Lect. Notes Physics. 1986. Vol. 246. P. 166—179.
- [10] Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордона и высшие представления // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 101. С. 101—110.
- [11] Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга—Бакстера // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 4. С. 27—34.
- [12] Дринфельд В. Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга—Бакстера // ДАН СССР. 1985. Т. 282. С. 1060—1064.
- [13] Drinfeld V. G. Quantum groups // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Berkeley, California: Acad. Press, 1986. Vol. 1. P. 798—820.
- [14] Abe E. Hopf Algebras, Cambridge tracts in mathematics 74. Cambridge; Univ. Press, 1980. 210 p.
- [15] Склянин Е. К. Об одной алгебре, порожденной квадратичными соотношениями // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 2. С. 214.
- [16] Jimbo M. A q -analog of $U(gl(N+1))$ Hecke algebras, and the Yang-Baxter equation // Let. Math. Phys. 1986. Vol. 11. P. 247—252.

- [17] Jimbo M. Quantum R matrix for the generalized Toda system // Commun. Math. Phys. 1986. Vol. 102. P. 537—548.
- [18] Connes A. Non-commutative differential geometry // Publ. Math. I. H. E. S. 1986. N 62.
- [19] Faddeev L. D., Reshetikhin N. Yu., Takhtajan L. A. Quantized Lie groups and Lie algebras. LOMI-preprint, E-14—87, L.: LOMI, 1987.
- [20] Manin Yu. I. Some remarks on Koszul algebras and quantum groups // An. Inst. Fourier. 1987. T. 27, N 4. P. 191—205.
- [21] Manin Yu. I. Quantum groups and non-commutative geometry. Preprint CRM-1561. Montréal, 1988.
- [22] Гуревич Д. И. Симметрии Гекке и квантовые детерминанты // ДАН СССР. 1988.
- [23] Bazhanov V. V. Integrable quantum systems and classical Lie algebras // Commun. Math. Phys. 1987. Vol. 113. P. 471—503.
- [24] Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947. 408 с.
- [25] Lyubashenko V. V. Vectorsymmetries. Seminar on Supermanifolds / Ed. by D. Leites. Vol. 14. Stockholm, 1987.
- [26] Ваксман Л. Л., Сойбельман Я. С. Алгебра функций на квантовой группе $SU(2)$ // Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22, вып. 3. С. 1—14.
- [27] Reshetikhin N. Yu. Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links. I. LOMI-preprint, E-4—87. L.: LOMI, 1988.
- [28] Padles P. Quantum spheres // Let. Math. Phys. 1987. Vol. 14. P. 193—202.
- [29] Masuda T., Mimachi K., Nakagami Y., Noumi M., Ueno K. Representations of quantum groups and q -analogue of orthogonal polynomials. Preprint RIMS-613. Kyoto, 1988.
- [30] Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга—Бакстера. II. Представления квантовой алгебры // Функцион. анализ и его прил. 1983. Т. 17, № 4. С. 34—48.
- [31] Lustig G. Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebra. M. I. T. preprint. Massachusetts, 1987.
- [32] Rosso M. Representations irréductibles de dimension finie du q -analogue de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie simple // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1987. Vol. 305. P. 587—590.
- [33] Date E., Jimbo M., Miwa T., Okado M. Solvable lattice models. Preprint RIMS-590. Kyoto, 1987.
- [34] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu. Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links. LOMI-preprint, E-9—88. L.: LOMI, 1988.
- [35] Reshetikhin N. Yu., Semenov-Tian-Shansky M. A. Quantum R -matrices and factorization problem in quantum groups. Imperial College preprint. London, 1988.
- [36] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 527 с.
- [37] Дринфельд В. Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, бигалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга—Бакстера // ДАН СССР. 1982. Т. 268, № 2. С. 285—287.
- [38] Semenov-Tian-Shansky M. A. Dressing transformations and Poisson group actions // Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1985. Vol. 21, N 1. P. 1237—1260.
- [39] Reshetikhin N. Yu. Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links. II. LOMI-preprint, E-17—87. L.: LOMI, 1988.
- [40] Turaev V. G. The Yang-Baxter equation and invariants of links. LOMI-preprint, E-3—87. L.: LOMI, 1987.
- [41] Кириллов А. Н., Решетихин Н. Ю. Анзатц Бете и комбинаторика таблиц Юнга // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 65—115.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступила 25 августа 1988 г.

Примечание при корректуре.

Алгебры с нестандартными, нелиевскими перестановочными соотношениями рассматривались в серии работ В. П. Маслова, М. В. Карасева и В. Е. Назайкинского «Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. I, II», опубликованных в сб. Соврем. пробл. мат.-ки, ВИНТИ, 1979, т. 13, с. 5—144, 145—267.